PERSPECTIVA EDUCACIONAL
Formación de Profesores

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Perspectiva Educacional. Formación de Profesores
Enero 2017, Vol. 56(1), pp. 84-108

GESTOS DIDÁCTICOS EN EL DESARROLLO DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN EL NIVEL UNIVERSITARIO RELATIVO AL CÁLCULO: EL FUNCIONAMIENTO DE LAS DIALÉCTICAS

DIDACTICAL GESTURES IN THE DEVELOPMENT OF A STUDY AND RESEARCH PATH AT UNIVERSITY LEVEL RELATED TO CALCULUS: FUNCTIONING OF THE DIALECTICS

Diana Patricia Salgado (*)
Universidad Nacional del Sur
Argentina
María Rita Otero
Verónica Parra
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas Argentina

Resumen

En este trabajo se presentan resultados parciales sobre la introducción en el nivel universitario de una enseñanza basada en la investigación, mediante el dispositivo didáctico Recorridos de Estudio e Investigación (REI). El REI propuesto parte de la pregunta Q_0: *¿Cómo calcular los costos en un micro-emprendimiento?* Se realizaron implementaciones en dos cursos de Matemática del primer año de una universidad pública argentina conformados por estudiantes ($N = 73$) que cursan carreras vinculadas a la Economía y a la Administración de Empresas. Se observan diferencias entre una y otra implementación, relacionadas con los gestos didácticos que la TAD denomina dialécticas.

Palabras clave: Cálculo. Universidad. Indicadores didáctico-matemáticos. Teoría antropológica de lo didáctico.

Abstract

This article presents the partial results of a university-level proposal based on inquiry based teaching using a didactical device called Study and Research Paths (SRP). The proposed SRP starts with the question Q_0: *How does one calculate the micro entrepreneurship costs?* Implementations were made in two mathematics courses of the first year of an Argentine public university. The courses were attended by students ($N = 73$) of the first year of the degree in Economics and in Enterprise Administration and Public Accountancy. Some differences between one implementation related to the didactic gestures named dialectics by the Anthropological Theory of the Didactic and another are observed.

Keywords: Calculus. University. Didactic mathematical indicators. Anthropological Theory of the Didactic.

(*)Autor para correspondencia:
Mg. Diana Patricia Salgado
Universidad Nacional del Sur
Departamento de Matemática
Avenida Alem 1253 (8000) Bahía Blanca.
Argentina
Correo de contacto: dsalgado@uns.edu.ar

RECIBIDO: 20 de mayo de 2016
ACEPTADO: 02 de septiembre de 2016
DOI: 10.4151/07189729-Vol.56-Iss.1-Art.470

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se propone como objetivo general cuestionar la forma tradicional de enseñar en la universidad en carreras donde la matemática no es una disciplina central sino, podría decirse, "colateral". Específicamente, se diseña, implementa, evalúa y modifica un dispositivo relativo al Cálculo, en dos cursos de matemática del primer año de las carreras Licenciatura en Economía, Licenciatura en Administración de Empresas y Contador Público de una universidad pública argentina.

La revisión de la literatura muestra que investigaciones realizadas sobre la enseñanza del Cálculo en la universidad (Kabael, 2009, 2011; Salinas & Alanís, 2009) describen diversos problemas, por ejemplo, Salinas y Alanís (2009) presentan una revisión que diferencia los artículos centrados sólo en la "forma de enseñar", de los que reparan en el "contenido a enseñar". Estos investigadores consideran que las características de las prácticas docentes aluden a un paradigma tradicional de enseñanza, cuyas características se centran en el contenido a enseñar y en la forma en que se enseña: el contenido se presenta estructurado de manera formal y rigurosa, y su "presentación" queda a cargo del profesor quien se limita a "exhibirlo", a enseñar su estructura. Salinas y Alanís (2009) proponen al enfoque socio-epistemológico como hilo conductor e integrador del qué y cómo enseñar las nociones y procedimientos del Cálculo.

Nuestro trabajo se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2013) desde la cual se cuestiona la funcionalidad del cálculo en los sistemas de enseñanza: ¿Por qué y para qué estudiar cálculo? La funcionalidad de los saberes responde a las razones de ser, al sentido del estudio de un saber. Cuando un saber pierde sentido o cuando no se conocen sus razones de ser, el "por qué y para qué", su estudio se reduce a una mecanización y memorización que sólo emula un aprendizaje. Al respecto, la TAD ha caracterizado un fenómeno didáctico denominado *monumentalización del saber o visita a obras*. Este fenómeno posiciona a los saberes como obras, como monumentos que se visitan, que se admiran, que no son útiles ni funcionales. Chevallard (2005) propone el dispositivo didáctico Recorridos de Estudio e Investigación (REI) como potencialmente capaz de recuperar la funcionalidad de los saberes a partir de la incorporación de la modelización matemática.

Tradicionalmente, la modelización ha sido y se encuentra fuertemente ligada a la idea de "aplicaciones". Autores como Blum y Borromeo Ferri (2009) proponen los denominados "ciclos de modelización" a través de los cuales describen los diferentes estadios de tal proceso: sitúan como punto de partida un problema del "mundo real" que debe ser traducido en términos matemáticos para poder obtener una solución, que luego tendrá que ser reinterpretada volviendo a la "situación real de partida". En el marco de la TAD, se reformulan los procesos de modelización considerándolos como reconstrucciones y articulaciones de praxeologías matemáticas y de otras disciplinas, de complejidad creciente. Esta reformulación puede concretarse a partir de la ampliación de las preguntas y/o de la consideración de diferentes hipótesis de partida. Esto permite proponer recorridos de estudio e investigación cada vez más amplios.

Es importante remarcar que la incorporación de los REI en los sistemas escolares requiere de un cambio de paradigma de enseñanza, del paradigma tradicional al de la investigación y del cuestionamiento (Chevallard, 2004, 2013) y además, que el nuevo paradigma es aún emergente, sobre todo en la institución universidad. Un objetivo de este trabajo es introducir en las clases de la UNS un dispositivo de enseñanza completamente nuevo, como los REI, desarrollarlo y analizar los resultados, las ventajas y las dificultades, focalizando en el dominio del Cálculo, en este contexto. Es decir que principalmente se presentan aquí resultados del diseño, implementación y análisis de un REI desarrollado en los cursos mencionados.

El REI propuesto parte de la pregunta Q_0: *¿Cómo calcular los costos en un micro-emprendimiento?* La búsqueda de respuestas a Q_0 produce el encuentro y reencuentro con obras propias de la matemática y de la economía que sustentan la modelización del problema e intentan recuperar el sentido del Cálculo en dos variables, mostrando su utilidad.

2. ANTECEDENTES

Investigaciones acerca de la enseñanza del cálculo, en particular del cálculo en dos o más variables, señalan las dificultades que su estudio genera (Kabael, 2009, 2011; Penalva Martínez & Sánchez Soriano, 1994; Trigueros & Martínez Planell, 2009, 2010, 2011, 2013; Yerushalmy, 1997). Trigueros y Martínez Planell (2009) profundizan en la manera en que los alumnos entienden la noción de función de dos variables y su relación con sus concepciones sobre dominio y rango. Consideran que se debería trabajar con funciones en diferentes representaciones, y en ello coinciden con la posición de Duval (2006) acerca del desarrollo.

Considerando el marco de la TAD, diversos trabajos proponen, implementan y analizan enseñanzas a partir de REI en el nivel universitario (Barquero, 2009; Serrano, Bosch & Gascón, 2007). Dichos trabajos consideran las condiciones y limitaciones que generan el contrato didáctico institucional y la organización tradicional de la enseñanza universitaria. Barquero (2009) ha realizado una implementación y análisis de un REI cuya pregunta generatriz se relaciona con la "dinámica de poblaciones", en un curso-taller con alumnos de Ingeniería Química en una universidad de Barcelona. Serrano, Bosch y Gascón (2007) han implementado un REI cuya pregunta generatriz se refiere a "¿Cómo hacer una previsión de ventas?", en un curso de matemática para la Administración y Dirección de Empresas en una universidad de Barcelona. Pueden mencionarse además, los aportes de Fonseca, Pereira y Casas (2010) y Fonseca (2011) quienes implementaron un REI en una escuela de ingeniería en una universidad de Vigo, proponiendo dispositivos especiales y paralelos a las cátedras, llamados "Talleres de Modelización Matemática". Estos investigadores consideraron aspectos relacionados al Cálculo Diferencial en la etapa comprendida entre la enseñanza secundaria y la universitaria. En la Argentina, Costa, Arlego y Otero (2013) diseñaron e implementaron una enseñanza por REI codisciplinar a la física en un curso de ciclo básico de matemática de una facultad de ingeniería argentina. La pregunta generatriz, ¿cómo construir edificaciones sustentables?, y sus derivadas permitieron recuperar el sentido y las razones de ser del Cálculo Vectorial integrando campos como la Termodinámica, la Mecánica de los fluidos, la Hidrodinámica, la Electricidad y el Magnetismo.

3. MARCO TEÓRICO

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2005, 2013) propone un paradigma aún emergente, llamado de la *investigación y del cuestionamiento del mundo*, que podría sustituir al tradicional. Los REI son por un lado dispositivos didácticos y por otro, una metodología de investigación, que no es otra que la que caracteriza a cualquier investigación científica. Así, los REI surgen a partir de una pregunta Q denominada *generatriz*. Esta pregunta es considerada como tal en la medida que la búsqueda de respuestas a ella genera otras, denominadas preguntas *derivadas*.

La búsqueda de respuestas a Q genera un sistema didáctico de la forma $S(X, Y, Q)$, donde X corresponde a un conjunto de estudiantes e Y, las ayudas al estudio (incluido el profesor). En este sistema S, el objeto de estudio está formado por las preguntas, lo cual genera un proceso de modelización que consta de las siguientes etapas: observar las respuestas existentes, denotadas $R^{\blacklozenge}$, analizar esas respuestas, evaluarlas, desarrollar una nueva respuesta y defender la nueva respuesta producida (Otero et al., 2013). Así, la pregunta generatriz y sus derivadas han de permitir "recorrer" todo o al menos una parte del programa de estudio propuesto.

Previamente al diseño e implementación de un REI, como parte de un análisis didáctico y praxeológico, es fundamental, tanto para el investigador como para el director del proceso de estudio, la construcción de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) (Chevallard, 1999). Este modelo consiste en la identificación, análisis y descripción de todas las obras (matemáticas y extra matemáticas) que podrían estudiarse, investigarse, construirse y/o reconstruirse al abordar la búsqueda de respuestas a la pregunta generatriz y a sus derivadas. Además, permite analizar los posibles recorridos a desarrollar a partir de cada una de esas preguntas.

En un REI el proceso de estudio se desarrolla a partir de acciones o gestos didácticos, "gestos del estudio y de la investigación" denominados en el marco de la TAD, "dialécticas" (Chevallard, 2007). Actualmente, Chevallard (2013) propone nueve dialécticas:

- D1: *Dialéctica del estudio y de la investigación*. Se manifiesta en la búsqueda permanente de respuestas a las preguntas a ser investigadas y en la formulación de nuevas preguntas. Al investigar para responder una pregunta, es necesario estudiar, y a su vez el estudio genera nuevas preguntas que requieren responderse para avanzar en el proceso de estudio.
- D2: *Dialéctica del individuo y del colectivo*. En un REI, cada pregunta es estudiada en forma conjunta o grupal. Cada integrante de la comunidad de estudio puede realizar un estudio e investigación individual, pero además debe contribuir a la respuesta colectiva y concretar un acuerdo con su grupo. En una genuina enseñanza por REI, las respuestas desarrolladas por cada grupo de estudiantes deben surgir de un consenso entre todos los miembros del grupo.
- D3: *Dialéctica del análisis* (y la síntesis) *praxeológico y del análisis* (y la síntesis) *didáctico*. Todo análisis praxeológico requiere el planteo de ciertas preguntas didácticas, por ejemplo: ¿de dónde viene esta praxeología?, ¿cómo apareció en esta institución?, etc. Por otra parte, siempre que

existe un análisis didáctico se debe considerar ¿cómo es la praxeología que se desea enseñar? Este análisis se materializa, por ejemplo, en la construcción por parte del investigador del Modelo Praxeológico de Referencia (MPR).

- D4: *Dialéctica del entrar y salir-de-tema*. Cuando la pregunta generatriz conduce a recorridos de estudio e investigación amplios, existe la posibilidad de "salir" del tema, incluso hasta de la disciplina de referencia y reingresar posteriormente. En distintos momentos del proceso de estudio pueden ocurrir entradas y salidas a distintas obras de distintas disciplinas. Esto ocurre cuando los saberes encontrados no están disponibles en el equipamiento praxeológico de los estudiantes o bien, cuando están disponibles pero es necesario realizar un reencuentro.
- D5: *Dialéctica del paracaidista y de las trufas*. La búsqueda de respuestas en un REI, requiere que los actores deban explorar el terreno desde arriba, inspeccionar *zonas de gran alcance*. Una vez identificado el objetivo, es necesario acercarse a los supuestos hallazgos y decidir sobre la utilidad de lo encontrado. Es decir, primero tomar distancia del problema y luego decidir qué de específico permitirá aportar la respuesta.
- D6: *Dialéctica de las cajas negras y cajas claras*. La búsqueda en diferentes fuentes de información requiere determinar qué saberes son más pertinentes y funcionales, estudiar y utilizar lo estrictamente necesario. Estudiar las obras en un *nivel de gris* adecuado.
- D7: *Dialéctica de la lectura y de la escritura*. La comunidad de estudio vincula las preguntas con ciertos saberes, sin transcripciones textuales, es decir, utiliza sólo los saberes relevantes y útiles para responder la pregunta. Los saberes son analizados, interpretados y reescritos sin realizar una copia textual.
- D8: *Dialéctica media-medio*. Para construir respuestas a preguntas es necesario decidir en qué medias (internet, profesor, libros, etc.) realizar la búsqueda y luego determinar cuáles de esos medias o cuáles de sus elementos serán incorporados al *medio* de estudio.
- D9: *Dialéctica de la difusión y de la recepción*. Una vez construida la respuesta en el interior de cada grupo, éstos la difunden y defienden para el resto de la comunidad de estudio.

4. PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN

1. ¿Qué indicadores didáctico-matemáticos revelan el funcionamiento de las dialécticas en el REI?
2. ¿Cómo se modifica el recorrido a lo largo de las dos implementaciones?

5. METODOLOGÍA

5.1. Contexto institucional

La universidad donde se llevó a cabo esta investigación posee una estructura departamental. Esto significa que el Departamento de Matemática ofrece los cursos de matemática para todas las carreras. Los cursos se imparten en forma cuatrimestral y en particular, los de matemática, afirman poseer una modalidad "teórico-práctica". La clase teórica es "conducida" exclusivamente por el profesor a cargo de la materia, y la clase práctica, por un asistente y auxiliares. Esta estructura conspira con la emergencia del paradigma de la investigación, tanto por la rigidez de los cursos como también porque ellos son "dictados" exclusivamente por expertos en matemática, que adoptan mayoritariamente el paradigma tradicional dominante.

Los alumnos que participaron de las implementaciones habían cursado en el primer cuatrimestre la materia Matemática IA, en la que habían estudiado el Cálculo en una variable.

Las implementaciones se realizaron en dos cursos de la cátedra Matemática IIA, del primer año de las carreras Licenciatura en Economía, Licenciatura en Administración de Empresas y Contador Público en la Universidad Nacional del Sur.

En la primera implementación, el grupo estuvo formado por 38 estudiantes (18/19 años). El REI se desarrolló durante 14 sesiones de clases de cuatro horas cada una, durante los meses de octubre y noviembre de 2014. Los estudiantes se distribuyeron (a su elección) en 10 grupos de, a lo sumo, 4 integrantes. Cada grupo fue identificado (G1 a G10) y también cada estudiante (A1 a A54) según el listado de inscripción a la materia suministrado por la universidad.

En la segunda implementación, el curso tuvo 35 estudiantes de las mismas edades, distribuidos en 9 grupos. EL REI se realizó durante 11 sesiones de clases de cuatro horas cada una durante los meses de octubre y noviembre de 2015. Los grupos y los estudiantes fueron identificados de manera análoga al año anterior.

En los dos casos el recorrido de estudio e investigación estuvo condicionado por el calendario académico que rige en la institución.

Se realizó observación participante por parte del profesor-investigador, a cargo del curso, y los docentes auxiliares. La inmersión en el curso por parte del investigador y los profesores auxiliares se concreta durante dos meses previos al desarrollo del REI y se describe detalladamente en un diario de clase.

En la primera sesión del REI, el profesor entregó a los estudiantes la pregunta generatriz: Q_0: *¿Cómo calcular los costos en un micro-emprendimiento?* En una enseñanza por REI, los grupos intentan responder Q_0 especificando nuevas preguntas. Al finalizar cada sesión de clase, los estudiantes entregaban su producción individual al profesor, las cuales eran escaneadas y devueltas la clase siguiente. Los grupos compartían y discutían con la clase sus contribuciones periódicamente, cada vez que avanzaban en la búsqueda de respuestas a las preguntas generadas. Al finalizar el REI, los grupos realizaron una síntesis del recorrido desarrollado durante todo el proceso de estudio contemplando las preguntas formuladas y las organizaciones matemáticas y económicas estudiadas.

5.2. Modelo Praxeológico de Referencia

La pregunta Q_0 propuesta a los estudiantes es parte de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) que se diseña previamente. Este modelo, que por cuestiones de espacio no se puede desarrollar acabadamente aquí, consiste en determinar, analizar y describir todas las obras matemáticas (OM) y económicas (OE) posibles de construir y/o reconstruir a partir de Q_0. El modelo no es definitivo, ni se genera de una vez, sino que evoluciona dialécticamente con el REI. La construcción del MPR permite determinar diferentes recorridos posibles a partir de Q_0 y de sus preguntas derivadas. Estos recorridos dependerán de las hipótesis de partida (H_j).

En este diseño, se considera que el micro-emprendimiento puede referirse a la fabricación de artículos, o a la compra de los mismos para luego venderlos. En tales casos, las distintas alternativas de decisión exigen la determinación de diferentes hipótesis H_j, según el tipo de costos que se deben afrontar:

- H_1: costos según el comportamiento frente a una variable independiente
- H_2: costos según la relación a su posible asignación con el producto
- H_3: Según la amplitud del cálculo
- H_4: Con relación al momento del cálculo
- H_5: Con relación a la toma de decisiones.

Considerar la hipótesis H_1, por ejemplo, deriva en la formulación de una función de costo que modela la situación, lo que conduce al encuentro o reencuentro con algunos de los componentes de la OM Cálculo en una o más variables y de la OE Costos. Bajo esta hipótesis, la función de costo puede depender de:

a) la producción: en cuyo caso la variable independiente representa, por ejemplo, la cantidad de artículos que se fabriquen.

b) el nivel de trabajo y el de capital: en tal caso intervienen dos variables, que representan las unidades de trabajo o mano de obra y las unidades de capital invertido, respectivamente.

Una vez planteada la función de costo, pueden derivarse situaciones que generan estudios matemáticos y económicos. Por ejemplo, si se supone la fabricación de dos artículos, la pregunta ¿cómo varía el costo total si ocurre un aumento en el número de unidades fabricadas de uno solo de los artículos? conduce a la OM Cálculo diferencial y a la OE Costos. En este caso, la función de costo podría formularse como $C(x, y) = c_1x + c_2y$, con $x\geq 0, y\geq 0, C\geq 0$ y c_1, c_2 números reales positivos que representan los costos variables de fabricación de x cantidad de artículos de un tipo e y del otro respectivamente. El cálculo de la derivada parcial $\frac{\partial C}{\partial x}$ nos da una idea aproximada de la variación del costo ante un aumento en una unidad en la cantidad fabricada del primer artículo, lo cual representa uno de los costos marginales.

5.3. Análisis de los registros

Para el análisis de los registros, se utilizan y adaptan los indicadores didáctico-matemáticos construidos por Parra, Otero y Fanaro (2015). Se utiliza la tabla confeccionada por estos investigadores donde se detalla el número de sesión, las preguntas estudiadas, las dialécticas (D1,…, D9) y en la última columna, el indicador de la dialéctica correspondiente. A modo de ejemplo, se presenta la Tabla 1, correspondiente a la sesión 1 de la primera implementación. Se completa la tabla indicando con un 1 si cada dialéctica ha sido identificada en cada sesión y con un 0 si no. En la última columna se presentan los indicadores de las dialécticas utilizando la notación I_i, $i = 1, \ldots, 9$. Por ejemplo, se indica con I_1 si ha ocurrido el funcionamiento de la dialéctica D1, es decir, del estudio y de la investigación.

Tabla 1
Indicadores de las dialécticas en la sesión 1 de la primera implementación

Sesión Nº	Pregunta generatriz y derivadas	Dialécticas									Indicadores
		D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	
1	Q_0: ¿Cómo calcular los costos en un micro emprendimiento?	1	1	1	1	0	1	1	1	1	I_1: Búsqueda en la carpeta de Matemática IA. I_1: Formulan preguntas derivadas de Q0. I_2: Decisiones respecto al micro emprendimiento. I_2: Decisiones respecto a la construcción del modelo. I_3: Los docentes realizan un análisis praxeológico y didáctico I_4: Las búsquedas se realizan en el ámbito de la economía y luego en la matemática. I_6: Los estudiantes deciden hacer un estudio aproximado de costos. I_7: Formulación de un modelo de función de costo. I_8: El profesor propone considerar un micro emprendimiento en particular. I_9: Los grupos difunden y defienden las respuestas.

Fuente: Elaboración propia.

6. CONSTRUCCIÓN DE INDICADORES DE LAS DIALÉCTICAS

Se presentan a continuación los indicadores I_i, $i = 1, \ldots, 9$ del funcionamiento de cada una de las dialécticas, esenciales para el desarrollo de un REI. En primer lugar, se detallan los I_i comunes a las dos implementaciones y luego algunos que surgieron en una y no en la otra. Indicamos con IMP1 o IMP2 si el ejemplo corresponde a la primera o segunda implementación respectivamente.

D1. *Dialéctica del estudio y de la investigación.*

I_1: *Búsquedas en Internet, en la biblioteca, en la carpeta de Matemática IA y en el material del curso.* Por ejemplo, cada grupo de estudiantes realizó una búsqueda en Internet, en libros de Matemática aplicada a la Economía y en las Notas del Curso para construir las respuestas a la pregunta generatriz y sus derivadas tales como: ¿cuál es el costo de producir una unidad más de cada producto?, ¿cómo se relaciona el costo marginal con el costo variable?, etc.

I_1: *Formulación de preguntas derivadas de* Q_0. Los estudiantes propusieron las preguntas (IMP1):

- Q_1: ¿Cuál es el costo de fabricar cada producto?
- Q_2: ¿Cómo podemos predecir cuál será el costo de fabricación de una determinada cantidad de artículos de cada tipo?
- Q_3: ¿Cuántos artículos de cada tipo podré fabricar con un determinado monto disponible para gastos?
- Q_4: ¿Cuál es el costo de producir una unidad más de cada producto?
- Q_5: ¿Cómo se relaciona el costo marginal con el costo variable?
- Q_6: Si la función costo total fuera cuadrática ¿cómo calcular los costos marginales?
- Q_7: ¿Qué son las derivadas parciales? ¿Cómo se calculan?
- Q_8: ¿Cómo varía la cantidad demandada respecto al precio?
- Q_9: Con un presupuesto dado, ¿cómo se relacionan las dos variables sobre la curva dada?
- Q_{10}: ¿Cómo minimizar los costos, producir más cantidad al mismo costo?
- Q_{11}: ¿El incremento de una función es igual a la derivada?,¿Es correcto escribir $C'(x_0, y_0) = C(x_0 + 1, y_0) - C(x_0, y_0)$?
- Q_{12}: Si una derivada parcial representa la pendiente de una recta tangente ¿Cuál es esa recta tangente?
- Q_{13}: ¿Cuál es el gráfico de una función de dos variables, de la recta tangente y del plano tangente?
- Q_{14}: ¿Función derivable en un punto implica continua en ese punto?

Las preguntas formuladas por los estudiantes en la IMP2 son:

- Q_1: ¿Cómo calcular el costo marginal de una función de dos variables?
- Q_2: ¿Cómo se calculan las derivadas parciales?
- Q_3: ¿Cómo es la gráfica de la función de costo planteada?
- Q_4: ¿Cuál es el dominio?
- Q_5: Para las derivadas parciales ¿las funciones deben ser continuas?

- Q_6: ¿Qué es un límite direccional y qué situaciones se presentan en el cálculo de costos?
- Q_7: La recta tangente tiene relación con los temas vistos ¿cómo podríamos aplicarlo al ejemplo de la empresa?
- Q_8: ¿Cómo varía el costo ante un aumento en las cantidades producidas?
- Q_9: ¿Cómo influye el tiempo en nuestros costos?
- Q_{10}: ¿Cuál es el mínimo que deben producir para no tener pérdidas?
- Q_{11}: ¿Cómo hallar los extremos de una función de dos variables?
- Q_{12}: ¿Cuál sería la utilidad máxima que puede obtener la empresa?
- Q_{13}: ¿Cuál sería la utilidad máxima o mínima de acuerdo a un presupuesto dado?
- Q_{14}: ¿cómo calcular el costo total en base al costo marginal?

I_1: Estudio de respuestas disponibles $R^{\blacklozenge}$, entendiéndose por tales a aquellas obras reconocidas por la cultura que no habían sido estudiadas con anterioridad o bien, que requieren un reencuentro. Para responder algunas de las preguntas derivadas antes mencionadas fue necesario estudiar las organizaciones matemáticas relativas a Funciones de dos variables, Derivadas parciales, Continuidad y Diferenciabilidad. Por ejemplo, fue necesario estudiar la praxeología de las derivadas parciales para dar respuesta a la pregunta Q_4: *¿Cuál es el costo de producir una unidad más de cada producto?* (IMP1). Este estudio incorporó, por ejemplo, el cálculo de derivadas parciales.

D2. *Dialéctica del individuo y del colectivo.*

I_2 *Tomas de decisiones dentro de cada grupo de estudiantes*, por ejemplo, cuando cada grupo decidió sobre qué micro-emprendimiento iba a realizar un cálculo de costos y, en principio, vieron la necesidad de formular una función de costo para calcular costos marginales.

Los micro-emprendimientos que consideraron los grupos Gi (i=1,…,10) (IMP1) son: G1: instalación de un bar; G2: fabricación de camas y puertas; G3: elaboración de pizzas; G4: compra-venta o producción y venta de un bien; G5: fabricación de tres productos (indumentaria); G6: compra-venta de celulares y tablets; G7: local de venta de ropa; G8: venta de chiclets y alfajores; G9: local de ropa: remeras y pantalones y G10: fabricación de zapatillas y zapatos.

Los grupos Gi (i=1,…,9) (IMP2) consideraron los siguientes micro-emprendimientos: G1: fabricación de pastas (tallarines y sorrentinos); G2: producción de sillas y mesas; G3: elaboración y venta de tortas; G4: fabricación y venta de mermeladas y dulce de leche; G5: librería (venta de cuadernos, block de hojas y carpetas); G6: producción y venta de dos tipos de empanadas; G7: pizzería; G8: producción de pastas (tallarines y sorrentinos) y G9: panadería (pan y bizcochos).

I_2: *Decisiones respecto a la construcción del modelo*. Por ejemplo, el grupo G1 (IMP1) consideró el modelo:

Costo Total= Costo Fijo + (Costo variable . Cantidad)

Para modelizar el costo referido a la instalación de un bar. Comenzó realizando estimaciones sobre los costos (Figura 1).

Al no poder identificar cuáles eran las variables, el grupo decidió abandonar ese micro-emprendimiento y considerar la fabricación de dos artículos. Planteó un segundo modelo:

$$CT = CV_1.Q_1 + CV_2.Q_2$$

Con variables Q_1 y Q_2 que representan las cantidades fabricadas de cada artículo.

Figura 1

Modelo considerado por el grupo G1 y estimación de costos

Microemprendimiento = un bar

1°- clasificamos los costos en fijos y variables.
2°- Determinación de los montos fijos.
3°- estimación de la demanda p/ fijar la cantidad a producir y así un aproximado de los costos variables.

costo total = costos fijos + (costos variables . cantidad)

como costos fijos podemos enunciar =

wz	$4000
GAS	$2000
Agua	$450
teléfono	$600
ABL	$200
Inmobiliario	$500
sueldos	$35000
Aportes patronales	$17500
seguros	$500
	$60750

costos variables

Alimentos	$25000	
bebidas	$25000	
tasa de seguridad e higiene:	$4000	(0,08%)
ingresos brutos	$17500	(3,5%)
impuesto a las ganancias	$175.000	(35%)
I.V.A	$50.000	
	$296500	

Estimación Ingreso Mensual = $500.000

Costos totales = cft + cvt
" = 60750 + 296500
= $357.250

Benef = It - Ct
" = $500.000 - $357250
" = $142750

Fuente: Elaboración propia.

La mayoría de los grupos, en las dos implementaciones, formuló funciones de costo con variables que representaban las cantidades fabricadas de cada artículo. El grupo G7 (IMP2), en cambio, decidió referirse a la instalación de una pizzería y formuló la siguiente función de costo total CT:

$$CT = CF + MP(p) + T(d) + S(p)$$

Con variables independientes p (producción) y d (distancia recorrida para el reparto de pizzas).

CF representa los costos fijos, en este caso, incluye el alquiler del local, los salarios de los empleados (teniendo en cuenta que con el tiempo pueden variar, por eso los costos fijos se expresan para un tiempo determinado), y los servicios fijos (los mínimos costos de servicios como luz, agua y gas).

MP representa el gasto en materia prima dependiendo de la cantidad producida p.

T se refiere al gasto en transporte en función de la distancia recorrida en los repartos a domicilio.

Por último, S representa los servicios relacionados con la producción, por ejemplo, el gasto en gas en los hornos según la cantidad de pizzas producidas.

Previamente, este grupo decidió investigar sobre el concepto de micro-emprendimiento y de costo. Dedujeron que los costos consisten en el gasto en la elaboración o prestación del servicio que le corresponda a un establecimiento determinado. Destacaron que en los micro-emprendimientos se poseen recursos limitados y bajo nivel de ventas. Como resultado de esto, elaboraron una ecuación que representaría el costo total y tomaron como ejemplo una pizzería. Luego indagaron sobre cómo calcular el costo marginal a partir de la función $CT(p,d)$, lo que condujo a investigar cómo se calculan las derivadas de una función de dos variables. Hallaron las derivadas parciales: $\frac{\partial CT}{\partial p}$ y $\frac{\partial CT}{\partial d}$ e interpretaron sus resultados dentro del contexto del problema.

D3. *Dialéctica del análisis (y la síntesis) praxeológica y del análisis (y la síntesis) didáctica.*

I_3: *Los docentes realizan un análisis praxeológico y didáctico*. Surgió este indicador toda vez que se analizaron las preguntas propuestas por los grupos y se debía decidir qué estudiar de las diferentes obras para dar una respuesta adecuada.

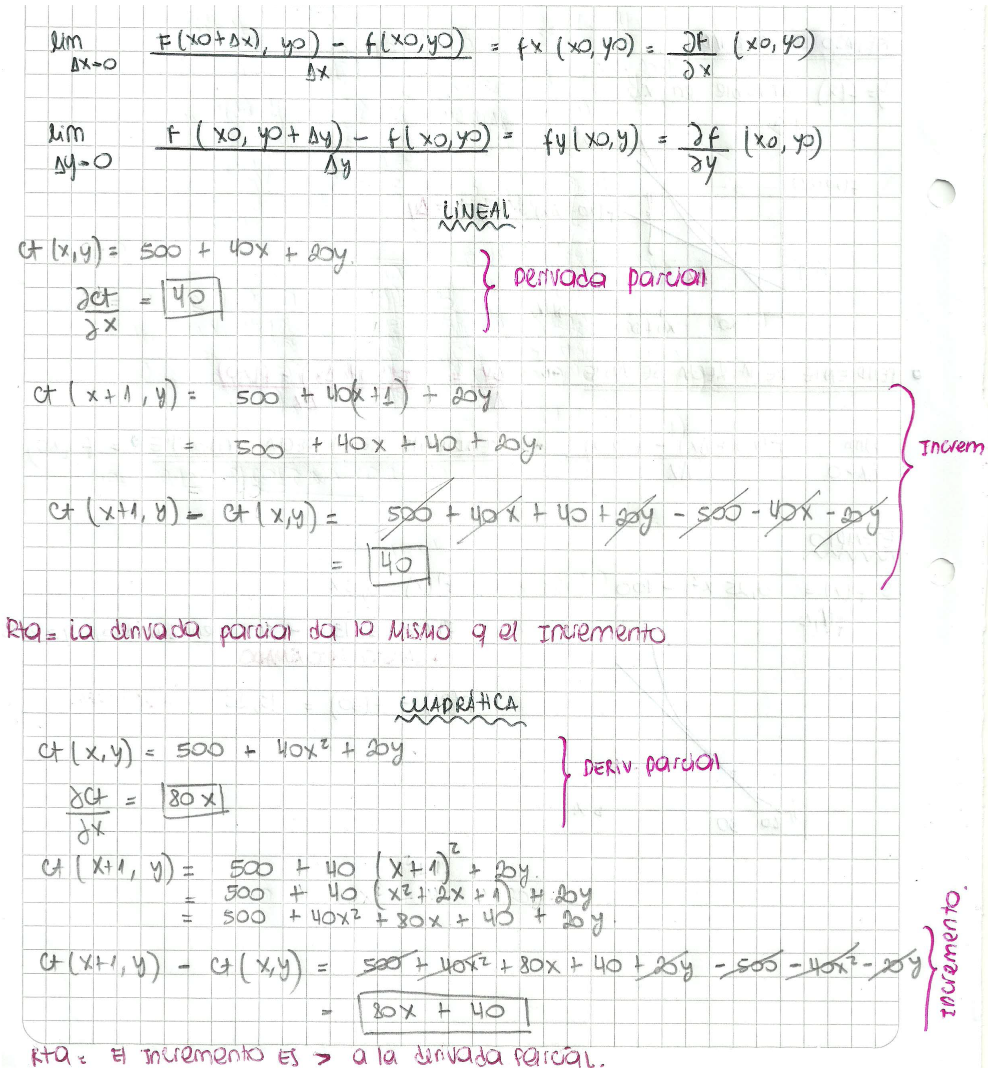
I_3: *Los grupos realizan una síntesis de las técnicas, tecnologías y teorías que componen las diferentes respuestas $R^\blacklozenge$*. Por ejemplo, cuando estudiaron la organización matemática de las derivadas parciales para responder Q_{11} (IMP1), analizaron el comportamiento del incremento y su relación con la noción de derivada parcial. Luego extrajeron conclusiones que permitieron responder Q_{11}.

I_3: *Los grupos analizan distintas praxeologías matemáticas para decidir qué les sirve para responder las preguntas:* praxeologías relativas a funciones de dos variables, límite, continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de funciones de dos variables.

Por ejemplo, el grupo G1 (IMP1) realizó un análisis y cálculo de las derivadas parciales (Figura 2) para responder Q11: *¿El incremento de una función es igual a la derivada?, ¿Es correcto escribir $C'(x_0,y_0)=C(x_0+1,y_0)-C(x_0,y_0)$?* Este grupo calculó derivadas parciales de la función de costo $CT(x,y)$, primero usando la definición y luego aplicando reglas de derivación. Analizó si el cociente incremental $\frac{\Delta CT}{\Delta x}(x_0,y_0)$ (con un incremento de la variable x en una unidad) coincidía con la derivada parcial $\frac{\partial CT}{\partial x}(x_0,y_0)$ para una función lineal y una cuadrática respectivamente.

Figura 2

Análisis de derivadas parciales realizado por el grupo G1



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

LINEAL

$$Ct(x,y) = 500 + 40x + 20y$$

$$\frac{\partial ct}{\partial x} = \boxed{40}$$

Derivada parcial

$$Ct(x+1,y) = 500 + 40(x+1) + 20y$$
$$= 500 + 40x + 40 + 20y$$
$$Ct(x+1,y) - Ct(x,y) = \cancel{500} + \cancel{40x} + 40 + \cancel{20y} - \cancel{500} - \cancel{40x} - \cancel{20y}$$
$$= \boxed{40}$$

Increm

Rta = la derivada parcial da lo mismo q el incremento

CUADRÁTICA

$$Ct(x,y) = 500 + 40x^2 + 20y$$

$$\frac{\partial Ct}{\partial x} = \boxed{80x}$$

Deriv. parcial

$$Ct(x+1,y) = 500 + 40(x+1)^2 + 20y$$
$$= 500 + 40(x^2+2x+1) + 20y$$
$$= 500 + 40x^2 + 80x + 40 + 20y$$
$$Ct(x+1,y) - Ct(x,y) = \cancel{500} + \cancel{40x^2} + 80x + 40 + \cancel{20y} - \cancel{500} - \cancel{40x^2} - \cancel{20y}$$
$$= \boxed{80x + 40}$$

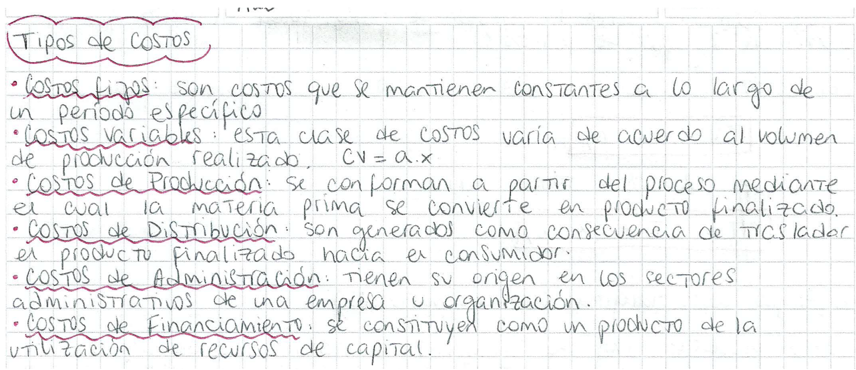
Incremento.

Rta: El incremento es > a la derivada parcial.

Fuente: Elaboración propia.

I_3: *Análisis y síntesis de la praxeología económica de costos*. El grupo G8 (IMP2) realizó una búsqueda, clasificación y síntesis de los diferentes tipos de costos (ver Figura 3).

Figura 3
Síntesis de los diferentes tipos de costos realizadas por G8



Tipos de Costos

- Costos fijos: son costos que se mantienen constantes a lo largo de un periodo específico
- Costos variables: esta clase de costos varía de acuerdo al volumen de producción realizado. CV = a.x
- Costos de Producción: se conforman a partir del proceso mediante el cual la materia prima se convierte en producto finalizado.
- Costos de Distribución: son generados como consecuencia de trasladar el producto finalizado hacia el consumidor.
- Costos de Administración: tienen su origen en los sectores administrativos de una empresa u organización.
- Costos de Financiamiento: se constituyen como un producto de la utilización de recursos de capital.

Fuente: Elaboración propia.

D4. *Dialéctica del tema y fuera-de-tema*.

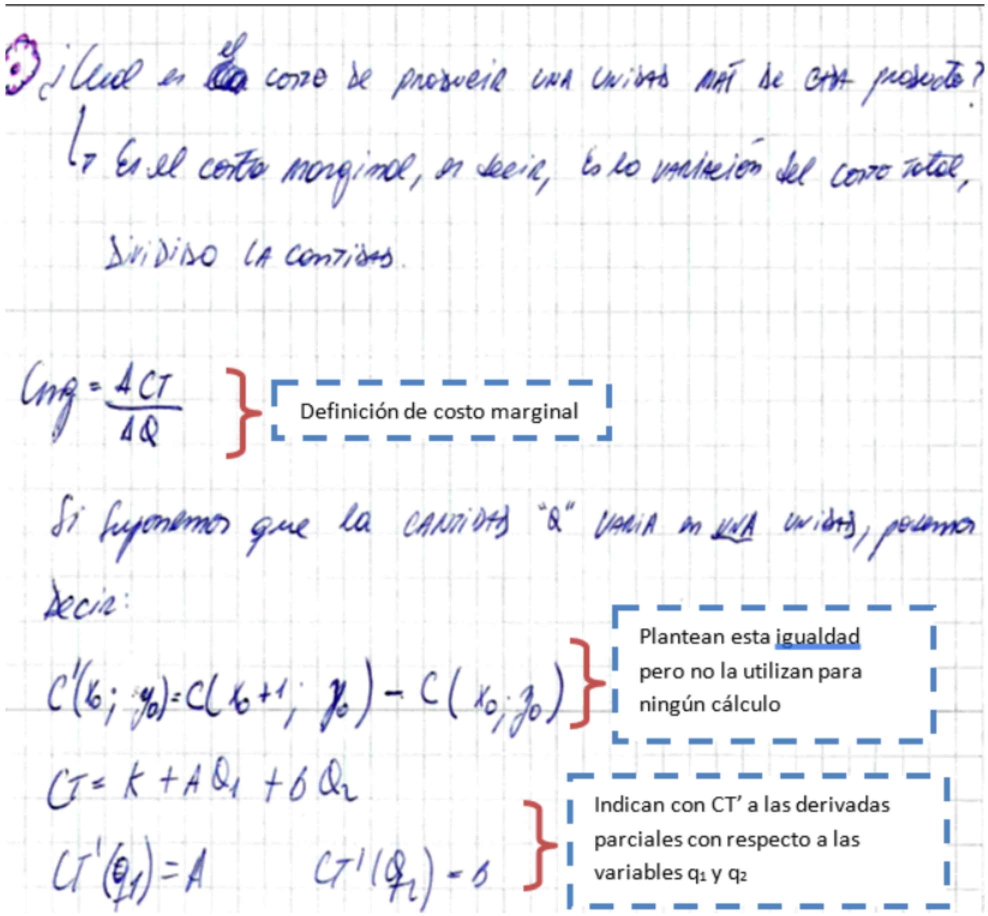
I_4: *Búsquedas en la economía y luego en la matemática*. Fueron necesarias salidas-entradas a la economía y salidas-entradas a la matemática: por ejemplo, cuando los estudiantes calcularon incrementos reales y aproximados del costo, lo cual requirió un ingreso a la organización matemática Diferenciabilidad.

I_4: *Entrada dentro de la matemática, una salida al interior de esta disciplina*. El estudio de la organización matemática relativa a las derivadas parciales condujo, en primer lugar, a estudiar la derivada de una función de una variable, su interpretación geométrica, el incremento y el diferencial. En segundo lugar, fue necesario profundizar el estudio del incremento de una función de dos variables, el cálculo de las derivadas parciales, la interpretación geométrica, la pendiente de la recta secante, la pendiente de la recta tangente y el gráfico de una función de dos variables. Además, el cómo hallar la ecuación de una recta tangente a una superficie y del plano tangente a la misma permitió recorrer algunos componentes de obras matemáticas existentes tales como el Álgebra vectorial y la Geometría en el espacio. Por otra parte, fue necesario estudiar la continuidad de una función para profundizar en la relación entre continuidad y derivabilidad de una función de dos variables.

El grupo G2 (IMP1) formuló una función costo para aportar respuestas a Q4: ¿cuál es el costo de producir una unidad adicional? La respuesta a ella implica ingresar en costos marginales y en consecuencia, en derivadas parciales. La Figura 4 contiene la producción parcial del estudiante A25 de G2.

Figura 4

El grupo G2 ingresa a la matemática para el estudio de las derivadas parciales



Fuente: Elaboración propia.

Este grupo calculó el costo de producir una unidad adicional del producto, considerando fija la producción del otro. Realizó este análisis a partir del incremento y de las derivadas de la función de costo $CT = K + AQ_1 + BQ_2$, con K, A y B constantes reales y Q_1,Q_2 variables independientes que representan las cantidades producidas. G2 utilizó su propia notación para las derivadas parciales. Escribió la igualdad: ¿$C'(x_0, y_0) = C(x_0 + 1, y_0) - C(x_0, y_0)$? que fue sometida a prueba en la sesión siguiente.

D5. *Dialéctica del paracaidista y buscadores de trufas.*

I_5: *Inspeccionan el problema*. En diversas ocasiones, fue necesaria una "inspección general" de las preguntas para luego determinar lo específico tanto de la Matemática como de la Economía que podría permitir aportar respuestas. El grupo G3 (IMP1) realizó una "inspección de la matemática" al tratar de aportar respuestas a Q_4: *¿cuál es el costo de producir una unidad más de cada producto?*

Especificó que el sector más pertinente era el del cálculo diferencial, en lo que se refiere a la derivabilidad de las funciones. En primer lugar, analizó la definición de estas derivadas y luego, actuando como "buscadores de trufas", concluyó que los costos marginales coinciden con las derivadas parciales.

D6. *Dialéctica de las cajas negras y cajas claras.*

I_6: *Los estudiantes deciden hacer un estudio estimativo de costos*. Para responder las preguntas Q_1, Q_2 y Q_3, por ejemplo, el grupo G2 (IMP1) realizó un cálculo estimado de costos relativo a su fábrica de puertas y estantes (cambiaron camas por estantes). La Figura 5 muestra la producción parcial del estudiante A24 de G2.

Figura 5

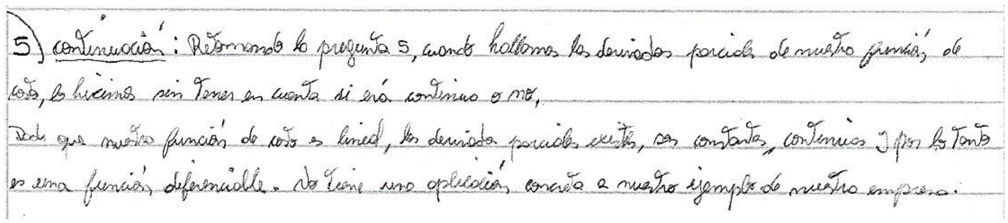
Estudio estimativo de costos realizado por el grupo G2

Fuente: Elaboración propia.

Este grupo formuló una función de costo CT, calculando previamente los costos variables de fabricación de cada artículo. Para ello estimó los precios unitarios, en base a los insumos (tornillos, madera y bisagras). Consideró que esta información era suficiente para formular CT.

I_6: Se decide estudiar los saberes pertinentes para responder las preguntas. En las primeras sesiones de IMP2, el grupo G9, por ejemplo, calculó las derivadas parciales de la función de costo. Luego investigó sobre la continuidad de esa función en búsqueda de alguna relación entre función derivable y continua. Extrajo conclusiones que se observan en la Figura 6. En esta conclusión, G9 no profundizó la noción de continuidad pero sí justificó con ella el cálculo previo de las derivadas parciales.

Figura 6
Análisis realizado por el grupo G9

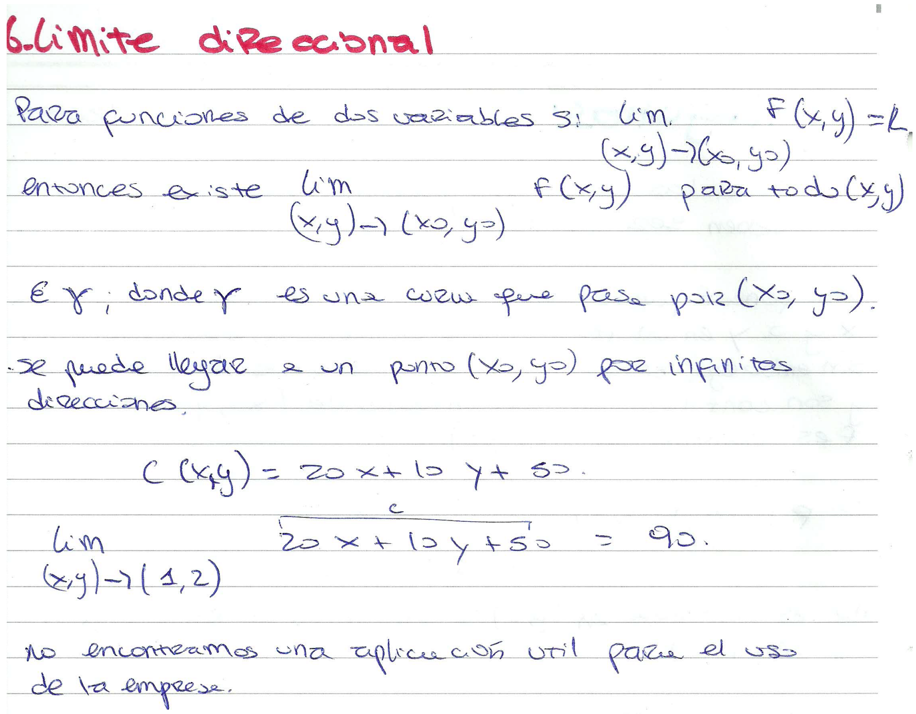

5) continuación: Retomando la pregunta 5, cuando hallamos las derivadas parciales de nuestra función de costo, lo hicimos sin tener en cuenta si era continua o no,
Dado que nuestra función de costo es lineal, las derivadas parciales existen, son constantes, continuas y por lo tanto es una función diferenciable. No tiene una aplicación concreta a nuestro ejemplo de nuestra empresa.

Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, el mismo grupo decidió no utilizar la noción de límite doble ni de límite direccional pues "no encontraban una aplicación útil para su empresa" (Figura 7).

Figura 7

Análisis realizado por el grupo G9



6. Limite direccional

Para funciones de dos variables si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$,
entonces existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ para todo (x,y)
$\in \gamma$; donde γ es una curva que pasa por (x_0, y_0).

se puede llegar a un punto (x_0, y_0) por infinitas direcciones.

$$C(x,y) = 20x + 10y + 50.$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \overbrace{20x + 10y + 50}^{c} = 90.$$

no encontramos una aplicación util para el uso de la empresa.

Fuente: Elaboración propia.

D7. *Dialéctica de la lectura y de la escritura.*

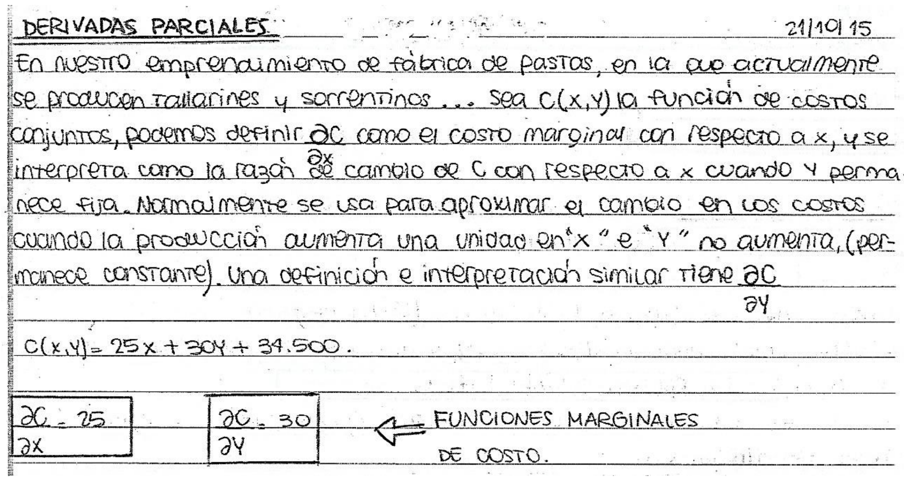
I_7: *Formulación de un modelo de función de costo*. Los grupos realizan una lectura de los diferentes tipos de costos y concluyen que el costo total es la suma del costo fijo y el costo variable. Reescriben el modelo en términos de las variables propias de cada micro-emprendimiento.

I_7: *Redacción y entrega de un informe final, por escrito y en formato digital*. La construcción y redacción de una posible respuesta a la pregunta generatriz implica también realizar una lectura y escritura de las praxeologías estudiadas y de las propias producciones de cada grupo de estudio.

I_7: Transcripción de respuestas parciales. El grupo G1 (IMP2), por ejemplo, realizó una "lectura" de las derivadas parciales para responder Q_1: *¿Cómo calcular el costo marginal de una función de dos variables?* (Figura 8). Luego, reescribió estas derivadas en términos de la función de costo e interpretó los resultados.

Figura 8

Transcripción de respuestas del grupo G1



DERIVADAS PARCIALES 21/10/15

En nuestro emprendimiento de fábrica de pastas, en la que actualmente se producen tallarines y sorrentinos ... Sea $C(x,y)$ la función de costos conjuntos, podemos definir $\frac{\partial C}{\partial x}$ como el costo marginal con respecto a x, y se interpreta como la razón de cambio de C con respecto a x cuando y permanece fija. Normalmente se usa para aproximar el cambio en los costos cuando la producción aumenta una unidad en "x" e "y" no aumenta, (permanece constante). Una definición e interpretación similar tiene $\frac{\partial C}{\partial y}$

$C(x,y) = 25x + 30y + 34.500.$

$\boxed{\frac{\partial C}{\partial x} = 25}$ $\boxed{\frac{\partial C}{\partial y} = 30}$ ⟸ FUNCIONES MARGINALES DE COSTO.

Fuente: Elaboración propia.

D8. *Dialéctica de la conjetura y de la prueba (média-medio).*

I_8: *El profesor y los auxiliares proponen considerar*

- un micro-emprendimiento en particular
- una función de dos variables que modele el problema

I_8: *El profesor y los auxiliares responden consultas de los estudiantes* con respecto a las técnicas matemáticas relativas a las funciones de dos variables, al cálculo de derivadas, al cálculo del límite doble, a la determinación de la continuidad y diferenciabilidad de una función de dos variables, y al cálculo de extremos.

I_8: *El profesor y los auxiliares responden consultas de los estudiantes* con respecto al uso del software Mathemathica, cuando se interesaron en representar gráficamente una función de dos variables. Este indicador surgió sólo en IMP1.

Las preguntas realizadas por los estudiantes a los docentes, permitieron ingresar al medio de estudio las técnicas de uso del software Mathemathica y también, el estudio de las técnicas en torno al cálculo de derivadas parciales, límites dobles y extremos. El uso de software permite utilizar las potencialidades de la tecnología en la modelización matemática, facilitando a los estudiantes la tarea de la representación gráfica de funciones, en futuras implementaciones se pretende explotar más dicho recurso.

I_8: *Se somete a prueba la igualdad*: $C'(x_0, y_0) = C(x_0 + 1, y_0) - C(x_0, y_0)$, propuesta por el grupo G2 (IMP1). Este indicador apareció sólo en IMP1.

I_8: *Los profesores responden consultas de los estudiantes, referidas al uso del editor de ecuaciones y al manejo del software GeoGebra*. Este indicador surgió sólo en IMP2.

D9. *Dialéctica de la difusión y de la recepción*.

I_9: *Los grupos difunden y defienden las respuestas*. Uno o más integrantes de cada grupo exponen sus resultados en forma oral.

Si bien en IMP1 surgió este indicador, pues difundir las producciones era una de las cláusulas de la nueva metodología de trabajo en clase, resultó difícil para los estudiantes expresarse y dirigirse hacia los demás. Este indicador apareció más naturalmente en la IMP2, a medida que los grupos avanzaban en las respuestas a sus preguntas. La razón de esta mayor predisposición de los estudiantes podría deberse a que ellos conocían, por comentarios de estudiantes de la IMP1, que el profesor implementaría esta metodología.

I_9: *Los estudiantes escuchan y opinan sobre las contribuciones de los demás grupos*. Cada respuesta construida por los grupos era difundida al resto de la clase permitiendo la participación y opinión de los demás grupos para validar ese resultado. Si bien este indicador ocurrió en las dos implementaciones, surgió con más naturalidad en IMP2.

7. ANÁLISIS DE LAS IMPLEMENTACIONES

El modelo praxeológico de referencia (MPR) construido permitió detectar distintos recorridos a partir de la pregunta generatriz. Las preguntas formuladas por los estudiantes en las dos implementaciones hicieron posible recorrer la parte del programa referida al cálculo diferencial en dos o más variables dotando de sentido al estudio de las funciones de dos variables.

Tanto en la IMP1 como en la IMP2 se detectaron principalmente indicadores del funcionamiento de las dialécticas D1, del estudio y la investigación y D2, del individuo y del colectivo, posiblemente por la necesidad de reunirse en grupo en búsqueda de respuestas a las preguntas generadas. Aunque cada estudiante realizaba su aporte individual, las respuestas debían surgir del grupo. Por esta razón, el trabajo individual de cada estudiante pasa a ser cuestionado por el grupo y el producto obtenido resulta de un consenso.

Además, se encontraron indicadores de D4, que evidencian entradas-salidas de la matemática a la economía y dentro de la matemática, esenciales en todo REI.

Por otra parte, D8 fue identificada en el proceso de estudio, de varias maneras. En la IMP1, resultó difícil para los docentes, quienes consideran que su principal función es "explicar", "iluminar" a los alumnos, no ceder ante la demanda de los estudiantes. En estas sesiones, el profesor parecía ser el único *media* autorizado. Esto se revela en indicadores del tipo: "el profesor propone…", "el profesor responde…". Sin embargo, en la IMP2, tanto el profesor como los auxiliares fueron un *media* más de la clase. Los grupos adoptaron los nuevos roles, estudiaron respuestas a las preguntas que ellos mismos generaron y éstas fueron incorporadas al *medio* desde distintos *medias*.

Los indicadores de D9, dialéctica de la difusión y de la recepción, si bien se observaron en las dos implementaciones, se detectaron más en IMP2, mientras que durante la IMP1 los estudiantes no estuvieron muy dispuestos a difundir y defender sus producciones.

Tomando en cuenta ambas implementaciones, se concluye que en la IMP2 se vivieron más naturalmente las dialécticas esenciales para el desarrollo de un REI a saber: D1, D2, D8 y D9. Esto se debería a que se modificó el funcionamiento del sistema didáctico: se consideró la pregunta generatriz, se analizaron posibles respuestas, se generaron nuevas preguntas, cuya incorporación al medio fue discutida, y se evaluaron y difundieron las respuestas producidas. En los cambios en el funcionamiento del sistema fueron decisivas las notas de campo producidas por la observación participante, donde el investigador y los profesores auxiliares registraron los acontecimientos, experiencias e intervenciones realizadas por los estudiantes y los profesores, para analizarlas a posteriori. Esto les permitió establecer qué tipos de intervenciones de los profesores habían condicionado, limitado o potenciado la formulación de preguntas derivadas por parte de los estudiantes o la construcción de un modelo cuyo sistema contenga mayor número de variables, etc. Es destacable que este análisis es completamente viable en la universidad, donde se pueden conformar equipos de cátedra, si se comprende su importancia.

Consideramos que los resultados aportan al cuestionamiento de la forma tradicional de enseñar el Cálculo en la universidad, en carreras donde la matemática no es una disciplina central.

Se concretó una enseñanza diferente, adoptando la modelización asociada al desarrollo de un REI cuya pregunta generatriz refiere a los costos de un micro-emprendimiento. En relación a la literatura existente (secciones 1, 2 y 3) podemos mencionar que aquí no se construyeron modelos como una aplicación de las praxeologías matemáticas y económicas previamente estudiadas, sino como una construcción en términos de necesidades de respuestas.

Las implementaciones no se realizaron en talleres de modelización paralelos a los cursos tradicionales de Cálculo, sino que el REI se desarrolló en el propio curso de Cálculo de las carreras Licenciatura en Economía, Licenciatura en Administración de Empresas y Contador Público de una universidad pública argentina con las restricciones que impone la organización Departamental, que determina una fuerte escisión entre lo que se estudia en Matemática de lo que se estudia, por ejemplo, en Economía y que dificulta la tarea interdisciplinar. Aun así, el REI permitió vincular en una misma clase ambas disciplinas, permitiendo a cada grupo construir el modelo que consideró más adecuado para describir el comportamiento de su propio micro-emprendimiento.

Además, con relación a la TAD, este trabajo presentó una descripción de las dialécticas a partir de la identificación de una serie de indicadores didáctico-matemáticos. Estos indicadores no han sido construidos previamente y se espera poder ampliarlos y clarificarlos, lo cual constituiría un aporte diferente al realizado por las investigaciones existentes.

8. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan resultados del diseño, implementación y evaluación de un REI para la enseñanza del Cálculo en el nivel universitario. Tomando en cuenta el análisis de las dialécticas para las dos implementaciones realizadas, se evidencia una evolución favorable del desarrollo del REI que podría explicarse a partir de la mayor experiencia del profesor para gestionar el dispositivo y, lo que a su vez favorece el involucramiento del resto de los docentes a su cargo. Si bien se relevaron indicadores de todas las dialécticas, los mayores progresos se observan en D1, del estudio y la investigación, D2, del individuo y del colectivo, D8, de la conjetura y de la prueba, y D9, dialéctica de la difusión y de la recepción, que son indispensables para afirmar que se desarrolló un REI.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona, España.

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado desde http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2005). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado desde http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Recuperado desde http: //yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemática en la Sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma. *Revista de Investigación en didáctica de la Matemáticas*, *2*(2), 161-182.

Costa, V., Arlego, M. & Otero. (2013). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria (REFIEDU)*, *7*(1), 20-40.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103-131.

Fonseca, C., Pereira, A. & Casas, J. M. (2010). Los REI en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje. En *III International conference on the Anthropological Theory of the Didactic Sant Hilari Sacalm* (pp. 247-256). Catalunya, Spain, Enero 25 a 29.

Fonseca, C. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, *23*(1), 97-121.

Kabael, T. (2009). The effects of the function machine on students' understanding levels and their image and definition for the concept of function. En S. L. Swars, D. W Stinson y S. Lemons-Smith (Eds.) En *Proceedings of the 31st annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 58-64). Atlanta, GA: Georgia State University.

Kabael, T. (2011). Generalizing single variable functions to two variable functions, function machine and APOS. Kuram ve Uygularmada Egitim Bilimler. *Educational sciences theory and practice*, *11*(1), 484-499.

Otero, M. R., Fanaro, M. A., Corica, A. R., LLanos, V. C., Sureda, P. & Parra. (2013). *Teoría antropológica de lo Didáctico en el aula de matemáticas*. Tandil, Buenos Aires: Dunken.

Parra., Otero, M. R. & Fanaro, M. (2015). Recorrido de estudio e investigación codisciplinar a la microeconomía en el último año del nivel secundario. preguntas generatrices y derivadas. uno. *Revista de Didáctica de la Matemáticas*, *69*, 1-10. Recuperado desde http://www.grao.com/revistas/uno/69-modelizacion

Penalva Martínez & M. del Carmen & Sánchez Soriano, J. (1994). Problemática de la enseñanza de conceptos del cálculo. *Revista SUMA 14-15*, 25-26.

Salinas, P. & Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355-382.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Cómo hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action, Actas del II Congreso Internacional sobre la TAD* (pp. 835-858). Montpellier: IUFM de l'académie de Montpellier. Recuperado desde http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD-II/listado-comunicaciones.htm

Trigueros, M. & Martínez Planell, R. (2009). Students'ideas on functions of two variables: domain, range and representations. en r. swars, s. l., stinson, d. w., y lemons-smith, s. (eds.). En *Proceedings of the 31st annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5, pp. 73-80). Atlanta, GA: Georgia State University.

Trigueros, M. & Martínez Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.

Trigueros, M. & Martínez Planell, R. (2011). How are graphs of two variable functions taught? en l.r. wiest & t.lamberg (eds.) En *Proceedings of the 33rd annual metting of the north america chapter of the international group for the psychology of mathematics education*. Reno, Nevada: University of Nevada at Reno.

Trigueros, M. & Martínez Planell, R. & Rico, M. P. (2013). Las funciones de dos variables: análisis desde el punto de vista de los resultados del diálogo entre la teoría apos y la tad. En *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société, 4 th international congress of the anthropological theory of the didactic* (pp. 105-120). Toulouse, Francia.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 431-466.