PERSPECTIVA EDUCACIONAL
Formación de Profesores

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Perspectiva Educacional. Formación de Profesores
Junio 2014, Vol. 53(2), Pp. 20-44

LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO: UN ESTUDIO DE CASO

THE MATHEMATICS TEACHER FORMATION FROM THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC: A CASE STUDY

Ana Rosa Corica (*)
María Rita Otero
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT)
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
Argentina

Resumen

En este trabajo se reportan resultados de un estudio de caso realizado con un estudiante del profesorado en Matemática durante la realización de sus prácticas docentes. El futuro profesor cursaba el último año de la carrera profesor de matemática en una universidad nacional argentina. Él diseñó e implementó un dispositivo didáctico para el estudio de nociones de cálculo, que a su entender permitiría desarrollar un REI. Los resultados indican que en la gestión de dicho dispositivo, el futuro profesor pudo incorporar ciertos elementos de la mencionada pedagogía, que no resultaron suficientes para realizar una enseñanza por REI. Esto pone de manifiesto la insuficiencia del equipamiento praxeológico del futuro profesor y nos permite reflexionar acerca de cómo debería modificarse la formación de profesores.

Palabras claves: Formación de profesores, Matemática, Universidad, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Recorrido de Estudio e Investigación.

Abstract

In this paper we reported results of a case study realized with a mathematics teacher student during the realization of their teaching practice. The future teacher was realizing the last year of the teaching training college at an Argentine national university. He designed and implemented a didactic device for study calculus notions, which in his opinion would develop a SRC. The results indicate that in the management of this device the future teacher could incorporate certain elements of the mentioned pedagogy, which were not enough to make a teaching by SRC. It highlights the insufficiency of the praxeological equipment of the future teacher and allows us to reflect about how it should be modified teacher training.

Keywords: Teacher formation, Mathematics, University, Anthropological Theory of the Didactic, Research and Study Course

(*) Autor para correspondencia:
Dra. Ana Rosa Corica
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
Facultad de Ciencias Exactas
Pinto 399.Tandil – Buenos Aires - Argentina
Correo de contacto:
acorica@exa.unicen.edu.ar

RECIBIDO: 10 de junio de 2013
ACEPTADO: 17 de octubre de 2013
DOI: 10.4151/07189729-Vol.53-Iss.2-Art.191

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se ubica en la problemática de la formación de profesores de matemática. Se trata de una problemática actual de investigación a la que diversos investigadores han aportado respuestas parciales y en muchos casos fundamentadas y contrastadas experimentalmente (Artaud, Cirade y Jullien, 2011; Azcárate, 2004; Bosch y Gascón, 2009; Chapman, 2013; Font, 2011; Gascón, 2003; Godino, 2009; Koc, Peker y Osmanoglu, 2009; Polo, González, Gómez y Restrepo, 2011; Rico, 2004; Robert y Pouyanne, 2005; Ruiz y Sierra, 2011; Sanchez y García, 2004; Sierra, Bosch y Gascón, 2012; Silverman y Thompson, 2008; Steff y Thompson, 2000).

Una de las problemáticas umbilicales a las que se enfrentan los procesos de formación actuales, es que los sistemas de enseñanza se encuentran gobernados por el *paradigma de la visita de saberes* (Chevallard, 2001a, 2004a, 2004b, 2006) que se caracteriza por anteponer el estudio de determinadas construcciones praxeológicas (los *monumentos*) al estudio de las cuestiones, problemas o necesidades que están en el origen del proyecto de formación. En este paradigma prevalece lo que Chevallard denomina *pedagogía del profesor* (Marietti, 2010), la que se caracteriza porque la introducción de las nociones de estudio es controlada constantemente por el profesor. Y los estudiantes son invitados a *visitar* estos cuerpos de saberes como se visita un monumento que no les es propio. Su lugar se reduce así a admirar y venerar estos *monumentos*. Según Chevallard (2007) es necesaria una *revolución epistemológica y didáctica* que ponga en el principio del aprendizaje de la matemática el estudio de cuestiones con verdadera razón de ser y a las que se esfuercen por responder. Se propone introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio *funcionales*, donde los saberes no sean monumentos que el profesor *muestra* a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. La solución propuesta al problema, toma la forma de dispositivo didáctico desarrollado por Yves Chevallard: *Recorridos de Estudio e Investigación* (en adelante REI).

Para llegar a una *pedagogía de REI* se requiere un *paradigma escolar del cuestionamiento del mundo*, lo que implica básicamente el estudio de cuestiones suficientemente ricas, vivas y fecundas, que provoquen en los estudiantes la necesidad de seguir aprendiendo, y que facilite abrir un proceso de investigación, que permita explorar, conjeturar y validar. Chevallard (2009a, 2009b) indica que aún se carece de una organización didáctica escolar para desarrollar plenamente este nuevo paradigma: las infraestructuras específicas, indispensables para una enseñanza por REI aún no están listas. Esto pone de manifiesto que se requiere de mayores investigaciones en el área que permitan fortalecer la formación de profesores para el diseño, implementación y evaluación de dispositivos didácticos con estas características. Pues, si bien el desarrollo de dispositivos didácticos con características de REI, tal vez no puedan ser implementados en su plenitud, si consideramos posible incorporar algunos elementos que involucra dicha pedagogía.

En este trabajo presentamos resultados parciales de una investigación sobre la formación didáctica del profesor de matemática de una universidad nacional Argentina. El estudio de la noción de REI en los dos últimos años de la formación de profesores de matemática, condujo a que estos elaboren praxeologías en torno a dicho dispositivo didáctico. En especial, nos ocuparemos de dar respuesta a la siguiente cuestión: ¿Qué dialécticas de una enseñanza por recorrido de estudio e investigación se manifiestan en la práctica profesional de un estudiante del profesorado de matemática?

2. MARCO TEÓRICO

En este trabajo adoptamos como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico y sus últimos desarrollos (Chevallard, 1999, 2004b, 2006, 2007, 2009b, 2012, 2013; Ladage y Chevallard, 2010). Siguiendo las líneas de investigación que propone la teoría, se plantea la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio *funcionales*, donde los saberes no constituyan *monumentos* que el profesor *enseña* a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. Los *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) son dispositivos propuestos para enfrentar el proceso de monumentalización del saber y para hacer vivir lo que Chevallard denomina la pedagogía de la investigación en la clase de matemática (Ladage y Chevallard, 2010).

La pedagogía de los REI cuestiona elementos del contrato escolar tradicional: el profesor como el *templo del saber*, como único garante de la validez de las respuestas, como gestor del tiempo didáctico, y el carácter individual del aprendizaje. Estos elementos quedan sustituidos por el modelo de un proceso de estudio colectivo, dirigido por un profesor que comparte con el grupo de estudiantes la responsabilidad de la gestión de los diferentes momentos didácticos. El objetivo del estudio viene definido como un conjunto de cuestiones *Q* a las que la comunidad de estudio se propone aportar una respuesta *R*. El punto de partida de un REI es una cuestión generatriz *Q viva* para la comunidad de estudio y cuya respuesta no aparece directamente accesible. Esta respuesta debe constituir en sí misma una aportación significativa, en el sentido de ampliar el universo praxeológico de la comunidad de estudio. En este modelo, durante la actividad de estudio, se movilizarán todos aquellos recursos, medios, saberes y respuestas disponibles que sean necesarios con tal de construir *R*. De esta manera, se acabará generalmente incluyendo praxeologías por lo menos locales, integrando elementos praxeológicos que pueden ir más allá del nivel regional e incluso disciplinario.

Una enseñanza por REI requiere regular *nueve dialécticas* (Chevallard, 2007, 2009c, 2013) que describimos a continuación:

2.1 La dialéctica del paracaidista y de las trufas

Se refiere a la condición de exploradores que asumen los actores del sistema didáctico. Pues, tienen que tomar una gran distancia del problema y explorar el terreno desde muy *arriba*. Requiere incorporar el gesto de *inspeccionar zonas de gran alcance*. Esta inspección difícilmente encuentra de inmediato lo que se busca, y requiere de gestos de acercamiento, para analizar la utilidad de lo encontrado. Esto posibilita hallar cosas *inesperadas*, que pueden resultar *semillas* que permitirán progresar en la investigación.

2.2 La dialéctica de entrar y salirse fuera del tema

En el transcurso de un REI, se buscan respuestas en *sentido fuerte* a una cuestión. Es necesario permitir salirse del tema al que inicialmente pertenece dicha cuestión, incluso hasta la posibilidad de salirse de la disciplina de referencia, para reingresar posteriormente. Las cuestiones generatrices que pueden dar lugar a recorridos amplios de estudio e investigación pocas veces pueden circunscribirse en el ámbito limitado de un único sector o incluso una única disciplina.

2.3 La dialéctica de las cajas negras y cajas claras

Se refiere al proceso de establecer qué conocimiento es pertinente y merece ser aclarado, analizado, etc., mientras se dejan, si es necesario, ciertos saberes a enseñar en un nivel de gris. Así, quedan en gris ciertos saberes que no son necesarios para responder la cuestión generatriz o sus cuestiones derivadas. Esta dialéctica se opone al hábito escolar que, en general, aspira a una claridad absoluta.

2.4 La dialéctica de la excripción textual y de la inscripción textual

Hace referencia al proceso de evitar la transcripción formal de respuestas parciales ya existentes, que pueden conducir a la construcción de la respuesta a la cuestión planteada. Así mismo, se cuestiona el texto donde se ha encontrado inscriptas a las posibles respuestas. Se trata de tomar de ellas la parte útil y volver a escribirlas en notas de síntesis, glosarios, etc.

2.5 La dialéctica de los media y los medios

Para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales es necesario disponer de algunas respuestas preestablecidas, accesibles a través de los diferentes medios de comunicación y difusión: los *media*. Los mismos pueden ser libros, artículos de investigación, apuntes de clase, etc. Es esencial que el estudiante tenga acceso a respuestas preestablecidas, que no se reduzcan a la respuesta *oficial* del profesor (o del libro de texto), así como a los medios para validarlas.

2.6 La dialéctica de la difusión y recepción de respuestas

Se trata del proceso que conduce a difundir y defender la respuesta desarrollada por la comunidad de estudio. Los saberes no son importantes per se, sino por el tipo de respuestas que permiten aportar, se trata de un saber que es producto de la actividad matemática de la comunidad de estudio.

2.7 La dialéctica del individuo y el colectivo

La colectividad de estudiantes con su director de estudio deben repartirse el conjunto de tareas y negociar las responsabilidades que debe asumir cada uno. El estudio comunitario de las cuestiones da la oportunidad de defender las respuestas producidas por la comunidad en lugar de aceptar la imposición de las respuestas oficiales admitidas por la institución escolar.

2.8 La dialéctica de preguntas y las respuestas

Una genuina búsqueda de respuestas a las cuestiones, genera nuevas preguntas que la comunidad de estudio decidirá cuándo y de qué manera van a responder. Requiere que la comunidad de estudio se concentre durante un largo periodo en el estudio de una misma cuestión, que la mantenga *viva* y *abierta*, y que sea capaz de derivar del estudio nuevas cuestiones. La pertinencia de estas cuestiones y la oportunidad (o no) de su consideración debe aparecer como un gesto más del proceso de estudio, a negociar entre el profesor y los estudiantes.

2.9 La dialéctica del estudio y de la investigación

Una investigación supone la combinación del estudio de respuestas preestablecidas, cuestiones y obras, junto a la investigación para pasar de obras precedentes a la respuesta *R*.

3. METODOLOGÍA

En este trabajo se reportan resultados de una investigación de corte cualitativa y el diseño de investigación propuesto es el estudio de caso (Rodríguez, Gil y García, 1999). Nuestro propósito fue explorar qué ideas de la enseñanza por REI son apropiadas por un futuro profesor de matemática al desarrollar sus prácticas docentes. La propuesta responde a la expectativa de profundizar en las ideas de los futuros profesores sobre una enseñanza por REI, para realizar sugerencias sobre la formación de profesores, con la perspectiva de que su futuro trabajo cotidiano en el aula resulte ser una experiencia de encuentros y diálogo con sus estudiantes, y hacer de la investigación una actividad permanente de búsqueda, aprendizaje y autoformación.

El estudio se desarrolló con un estudiante del profesorado en matemática de una universidad pública argentina. El futuro profesor (FP) se caracteriza por haber tenido buen desempeño académico durante toda su carrera, y cuando se desarrolló la investigación, se encontraba realizando el último año de su carrera.

El plan de estudio del profesorado en matemática tiene un tiempo de duración de cuatro años, en el que se propone incidir en la formación de la siguiente manera:

- Los conceptos básicos para la formación de un profesor en matemática, así como información sobre distintos campos de especialización y algunos temas de Matemática aplicada,
- Las concepciones epistemológicas actuales y la evolución histórica de las mismas en relación al saber matemático,
- Los conceptos pedagógicos, psicológicos y didácticos necesarios para trasponer esos saberes al aula en todos los niveles del sistema educativo.

En el último año del plan de estudio del profesorado, se propone realizar las prácticas docentes cuyo propósito es: permitir el diseño y la implementación de secuencias didácticas, así como la resolución de problemas concretos que se presentan en el aula y la profundización de una actitud de reflexión permanente sobre la propia práctica.

Realizamos nuestra investigación cuando el futuro profesor debía realizar sus prácticas docentes. Durante su formación, estudió la Teoría Antropológica de lo Didáctico, sus últimos desarrollos e investigaciones relacionadas (Barquero, 2009; Bosch, Espinoza y Gascón, 2003; Bosch, Fonseca y Gascón, 2004; Bosch, García, Gascón y Ruíz, 2006; Chevallard, 1999, 2007; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Cid y Bolea, 2007; Marietti, 2010; Llanos, Otero y Bilbao, 2011; Ruíz, Bosch y Gascón, 2007).

3.1 Descripción institucional del curso en el que se desarrolló la investigación

El futuro profesor desarrolló sus prácticas en un curso de sexto año de la escuela secundaria argentina de una institución pública. En el curso se destinan cuatro horas semanales para el estudio de la matemática, segmentadas en un encuentro de dos horas y dos encuentros de una hora cada uno. El curso se encontraba compuesto por N=23 estudiantes cuyas edades oscilaban entre 17 y 18 años.

El futuro profesor antes de realizar su implementación concurrió a 6 sesiones del curso en carácter de ayudante, con el propósito de vincularse con el grupo de estudiantes, y así conocer sus hábitos de estudio y dificultades. Así mismo, para que los estudiantes conocieran quien en breve sería su profesor. Esto permitió al futuro profesor poder caracterizar al grupo de estudiantes, quienes se encontraban inmersos en una pedagogía monumentalista de la enseñanza de la matemática.

3.2 Recolección de datos

La implementación FP contempló 10 sesiones en las que se propuso estudiar nociones de límite y continuidad de funciones. Para el diseño del dispositivo el FP consultó libros de textos escolares y universitarios. La propuesta contempló la realización de tareas con lápiz y papel y mediante el software Geogebra®.

Se registró en audio general cada una de las sesiones que involucró la implementación, y se realizaron notas de campo antes, durante y después de cada sesión. En todas las clases, el futuro profesor proporcionó a los estudiantes las tareas a resolver y al finalizar cada sesión, recogió la totalidad de las producciones escritas. Se escanearon y se devolvieron a los estudiantes en la sesión inmediata siguiente, para garantizar que los alumnos no realizaran modificaciones a sus resoluciones luego de cada sesión, para asegurar la continuidad de su trabajo y para que ellos dispusieran permanentemente de sus registros.

También, con el propósito de conocer en profundidad la razón de la secuencia propuesta por el FP, se mantuvieron entrevistas semi estructuradas antes y después del desarrollo de la secuencia.

3.3 La enseñanza de nociones de cálculo y el diseño curricular

En este apartado describimos parte del diseño curricular de sexto año propuesto por la Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires (2011). En particular, se indica estudiar las siguientes nociones relacionados al cálculo: *límite en el infinito*, *límite en un punto*, *continuidad*, *derivada de un punto, función derivada*, *estudio completo de funciones sencillas e integrales*. Aquí se propone que los estudiantes realicen un análisis más complejo de las funciones que lo realizado en años previos.

En el diseño curricular, la noción de límite es considera como el núcleo central de la organización del cálculo. En particular, se propone recuperar las nociones intuitivas de los estudiantes y a partir de allí enfatizar el cálculo del límite. Así mismo, se propone plantear situaciones que permitan a los estudiantes caracterizar los casos de indeterminación y buscar estrategias para salvarlas. Destacamos que en esta propuesta es evidente el reduccionismo de la noción de límite al cálculo del límite. En particular, las tareas ejemplares propuestas en el diseño se pueden englobar en el siguiente tipo de tareas (T_1), compuesta por dos únicas tareas:

T_1: *Calcular el límite*

$T_{1,1}$: *Calcular el límite de funciones racionales en el infinito*

$T_{1,2}$: *Calcular el límite de funciones racionales en un punto*

Las técnicas propuestas para el estudio de las funciones se reducen a analizar gráficos y tablas. Inferimos que el concepto de límite es concebido aquí como el proceso del paso al límite como simple aproximación. Según Blázquez y Ortega (2002) esta concepción no resulta suficiente para definirla noción de límite en la escuela secundaria, en donde se pretende que los estudiantes definan y comprendan la noción de derivada, y llevar a cabo procesos de integración sin que ambos se reduzcan a un conjunto de cálculos.

En correspondencia con estudios previos en el que desarrollamos un modelo epistemológico de referencia en relación a nociones de límite y continuidad (Corica y Otero, 2012), en el diseño curricular se propone el estudio de una organización en torno al estudio del límite y la continuidad de funciones desarticulada. Pues, no se hace explícita la vinculación que se propone entre ambas nociones, y no se abordan cuestiones fundamentales del estudio del límite de funciones, tal como la existencia y unicidad del límite. En el diseño curricular, la enseñanza se focaliza en realizar cálculos con límites, dejando de lado otros tipos de tareas vinculadas a demostrar la existencia del límite. Así, predomina una enseñanza del cálculo esencialmente *algebraica*, al tratar el límite como un proceso algebraico *finito*, y en un intento escolar de reducir las técnicas específicas del análisis, en las que prevalece la utilización de condiciones suficientes, a maneras de hacer puramente algebraicas centradas en el uso de equivalencias sucesivas (Artigue, 1995).

4. ANÁLISIS DE LAS SESIONES DE CLASES

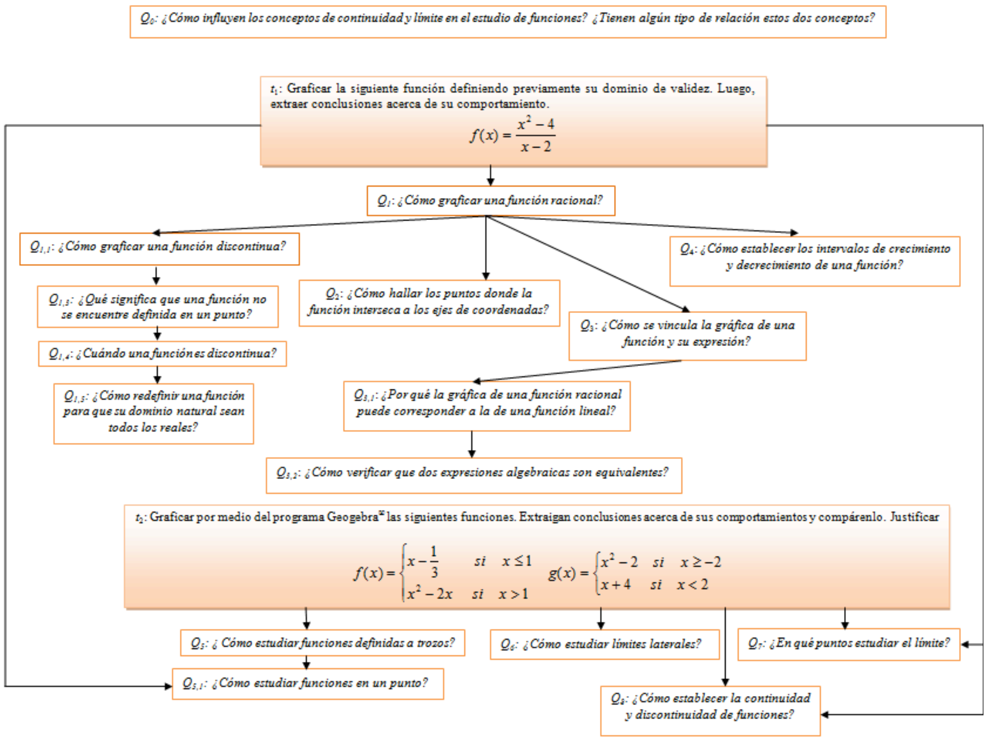
Atendiendo a las limitaciones del diseño curricular y el curso en el que se desarrolló la implementación, el FP propuso un conjunto de situaciones que tienen como objetivo dar respuesta a la siguiente cuestión:

> *Q_0: ¿Cómo influyen los conceptos de continuidad y límite en el estudio de funciones? ¿Tienen algún tipo de relación estos dos conceptos?*

El FP indicó que para el grupo de alumnos Q_0 es una cuestión en sentido fuerte, pues su estudio permite el despliegue de otras cuestiones derivadas que exceden la sola demanda de información, tales como: ¿Cuándo existe el límite? ¿Cómo establecer la unicidad de la existencia del límite? ¿Cómo calcular el límite? ¿Cuándo una función es continua? ¿De qué manera establecer la continuidad de las funciones? ¿Para qué estudiar el límite y la continuidad de funciones?

En el siguiente esquema se sintetiza la propuesta del futuro profesor. Su construcción se realizó a partir del estudio de las praxeologías efectivamente enseñadas.

FIGURA 1. Praxeología efectivamente enseñada



Fuente: Elaboración propia a partir de las tareas y cuestiones que se estudiaron en el curso.

La tarea t_1 da origen al estudio del límite de funciones y se complementa con el estudio de t_2. El estudio de t_1 perduró durante 7 sesiones. Su estudio derivó en forma inmediata a la formulación de Q_1: ¿Cómo graficar una función racional?, y a su vez esta cuestión derivó en $Q_{1,1}$: ¿Cómo graficar una función discontinua? Ambas cuestiones fueron abordadas en la primera sesión junto a Q_2: ¿Cómo hallar los puntos donde la función interseca a los ejes de coordenadas? Esta última cuestión puso en evidencia las dificultades de los alumnos para su estudio, lo que requirió ser retomado en la segunda sesión. En la sesión 2 se retomaron las cuestiones formuladas en la primera sesión y el estudio además, dio lugar a la búsqueda de respuesta a Q_3: ¿Cómo se vincula la gráfica de una función y su expresión algebraica? Y sus cuestiones derivadas: $Q_{3,1}$: ¿Por qué la gráfica de una función racional puede corresponder a la de una función lineal?, $Q_{3,2}$: ¿Cómo verificar que dos expresiones algebraicas son equivalentes? En la misma sesión emergió el estudio de Q_4: ¿Cómo establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función? En la sesión 3 el estudio se concentró en dar respuesta a $Q_{1,3}$: ¿Qué significa que una función no se encuentre definida en un punto?,$Q_{1,4}$: ¿Cuándo una función es discontinua? y $Q_{1,5}$: ¿Cómo redefinir una función para que su dominio natural sean todos los reales? Estas cuestiones condujeron a involucrar a los estudiantes en el estudio del límite y la continuidad de funciones. Así mismo, la última cuestión derivó en la definición de funciones en ramas y preparó el camino para estudiar la tarea t_2

en la siguiente sesión. En la sesión 4 se presentó la tarea t_2 y se focalizó el estudio en dar respuesta a Q_2: ¿Cómo hallar los puntos donde la función corta a los ejes de coordenadas?, que emerge en el estudio de la sesión 1. Así, de la sesión 4 a 7 se realizó un estudio en conjunto de la tarea t_1 y t_2 que condujo a revisar cuestiones que emergieron del estudio de t_1 y propiciar el estudio de Q_5: ¿Cómo estudiar funciones definidas a trozos?, y la cuestión asociada $Q_{5,1}$: ¿Cómo estudiar funciones en un punto?, Q_6: ¿Cómo estudiar límites laterales?, Q_7: ¿En qué puntos estudiar el límite? y Q_8: ¿Cómo establecer la continuidad y discontinuidad de funciones?

A continuación profundizamos en la descripción de cada una de las sesiones. En algunos casos se indican fragmentos de las intervenciones de los alumnos y el FP. Ambas intervenciones son rotuladas con un número que indica el turno de habla de cada sesión. A las intervenciones de los estudiantes se las identifica con la letra A de manera genérica, pues a los fines de la investigación, solo interesó recoger las intervenciones de los estudiantes sin identificar cada alumno en particular.

4.1 Sesión 1

Para dar respuesta a la cuestión Q_0, el FP propuso abordar la siguiente tarea t_1:

Graficar la siguiente función definiendo previamente su dominio de validez. Luego, extraer conclusiones acerca de su comportamiento: $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

El estudio de t_1 condujo a la formulación de las siguientes cuestiones: Q_1: *¿Cómo graficar una función racional?*.Y a su vez esta cuestión derivó en formular $Q_{1,1}$: *¿Cómo graficar una función discontinua?*.

El FP destinó 20 minutos para el estudio det_1 en pequeños grupos compuestos por tres o cuatro personas.

Para el grupo de alumnos el momento de estudio primario que despliega el hacer de la tarea, es el *momento del trabajo de la técnica*. Pues, en años anteriores los estudiantes vivieron el estudio de este tipo de tareas. Sin embargo, la manera de hacer de los estudiantes denota que están viviendo el *momento del primer encuentro*. La técnica propuesta por los estudiantes, para confeccionar la gráfica fue mediante la elaboración de una tabla. Consideramos que esta resulta ser una técnica poco eficaz para graficar el tipo de función que se involucra en la tarea, pero parecería ser la única inmediatamente disponible por los estudiantes. Así mismo, los alumnos demostraron ciertas dificultades para construir la tabla, lo que generó constante demanda al FP para que indique la respuesta, tal como lo manifiesta el siguiente estudiante:

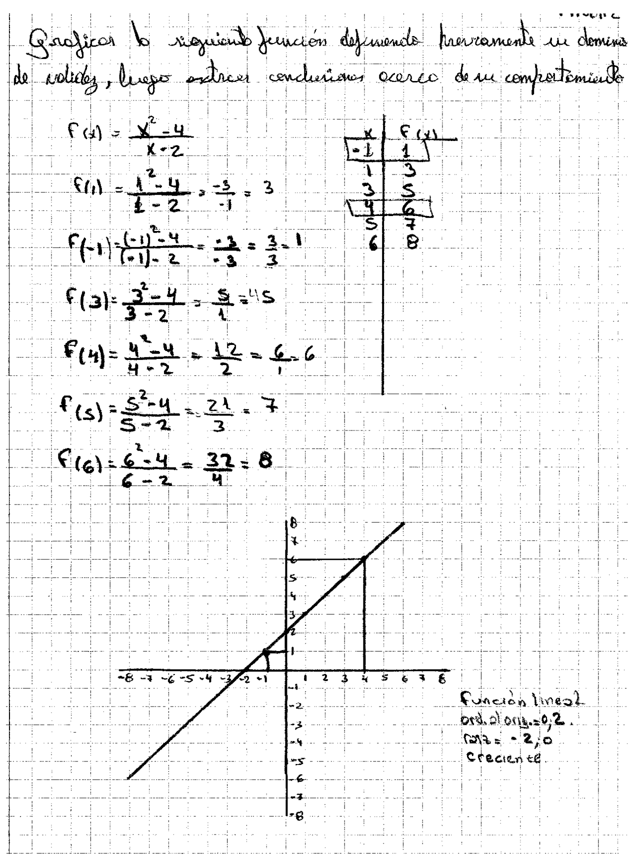
> [47] *A: Por qué no explica cómo se hace el primero para los que no entienden. Explíquele primero como se hace una tabla y después ven…*

El FP intentó que los estudiantes, emergidos en el momento del primer encuentro y exploratorio, se responsabilizaran del estudio, pero se enfrentó a un grupo de estudiantes con grandes dificultades que requirió retomar nociones fundamentales, estudiadas en años anteriores, para avanzar en el análisis.

A pesar de las *ayudas al estudio* proporcionadas por el FP, los estudiantes no lograron sortear las dificultades para construir la gráfica de la función. Por esta razón, FP recurrió a proponer la construcción de la misma con el programa Geogebra®. Este recurso permitió que los estudiantes fácilmente observaran que la representación gráfica de la función correspondía a la de una función lineal, y avanzaran sobre el análisis del crecimiento y decrecimiento de la misma, y los puntos de intersección de la función con los ejes de coordenadas. Así, posteriormente los estudiantes retomaron la resolución de t_1 mediante lápiz y papel.

De los 17 protocolos obtenidos, destacamos que en dos de ellos se identifica que para $x = 2$ la función no se encuentra definida. Así mismo, se obtuvieron resoluciones como la propuesta por el alumno A_1 (ver figura 2). Aquí se propone la representación de la función mediante una tabla donde se omite el estudio de la función para $x = 2$, y se propone una gráfica donde no se visualiza problemática aparente en dicho punto.

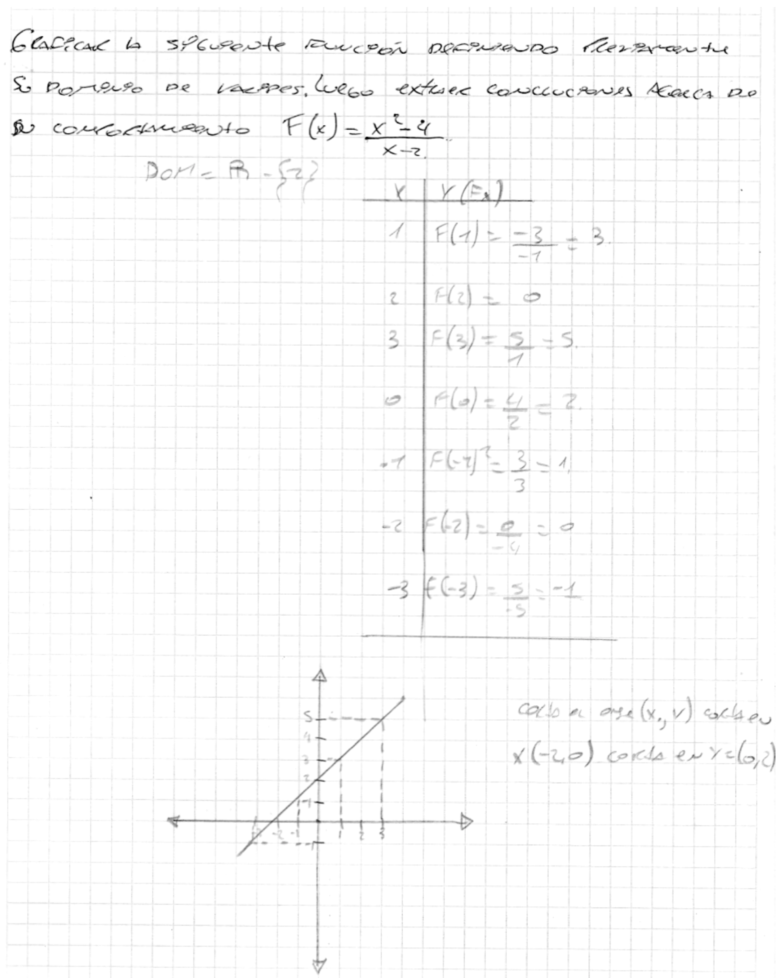
FIGURA 2. Resolución propuesta por el alumno A_1 a la tarea t_1



Fuente: Carpeta de estudio del alumno A_1.

Otro tipo de resolución es como la propuesta por el alumno A_2 (ver Figura 3). El estudiante representó la función mediante una tabla donde propuso su estudio en $x = 2$; realizando cálculos inadecuados para determinar la respectiva imagen, que no permiten permear la problemática en dicho punto. A continuación, propuso la representación gráfica de la función sin indicar problemáticas en $x = 2$ y sin advertir que entre ambos sistemas de representación, para el mismo valor de dominio, se considera diferente valor de imagen.

FIGURA 3. Resolución propuesta por A_2 a la tarea t_1



Fuente: Carpeta de estudio del alumno A_2

Destacamos que el empleo del software Geogebra®, permitió resolver parcialmente la tarea. Pues si bien, los estudiantes pudieron observar cuál es la representación gráfica de la función y describir algunas sus características, el programa no posibilita visualizar de manera directa el punto de discontinuidad de la función. Esto requirió seguir explorando las particularidades de la función en el punto $x = 2$ en las sucesivas sesiones.

4.2 Sesión 2

La segunda sesión tuvo lugar en un encuentro de 60 minutos. El FP inició su actividad proponiendo una síntesis de la clase anterior. Aquí los alumnos concluyeron que la función involucrada en $t_1$es lineal, creciente y corta a los dos ejes de coordenadas, mediante el estudio de la representación gráfica realizada con el software Geogebra®. En esta segunda sesión, el FP instaló las cuestiones: Q_2: ¿Cómo hallar los puntos donde la función intersecta a los ejes de coordenadas?, Q_3: ¿Cómo se vincula la gráfica de una función y su expresión algebraica?, $Q_{3,1}$: ¿Por qué la gráfica de una función racional puede corresponder a la de una función lineal?, $Q_{3,2}$: ¿Cómo verificar que dos expresiones algebraicas son equivalentes?, Q_4: ¿Cómo establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función?.

En particular, los aspectos a analizar de la función son propuestos por los estudiantes. Es decir, la tarea *analizar funciones* se reduce al estudio del crecimiento de la función y de los puntos de intersección de la función con los ejes de coordenadas, quedando excluido el estudio de los intervalos de positividad y negatividad, así como el estudio de extremos.

Para el estudio de los puntos donde la función corta a los ejes de coordenada los estudiantes propusieron trazar la gráfica de la función y desde allí determinar los puntos de intersección. Aquí el FP instaló la insuficiencia de la técnica empleada, pues indicó:

[14] FP: *¿Cómo hicieron para obtener ese resultado?*

[16] A: *Lo fuimos graficando y de ahí sacamos conclusiones.*

[20] A: *Haciendo cualquier punto. Pones cualquier número y marcás los puntos. Cuando haces la recta corta ahí en los ejes.*

[21] FP: *(...) Graficaste dos puntos. Hiciste la recta. Pero por medio del gráfico nosotros no podemos justificar, porque tal vez era menos dos coma uno o...*

[22] A: *Bueno, es aproximado.*

El FP continuó indagando para que emerjan las técnicas algebraicas que justifican cuáles son exactamente los puntos donde la función corta a los ejes de coordenada. Como la discusión no avanzó en este sentido, propuso salirse del *tema* y retomar otro:

[51] FP: *(...) Cuando reemplazaron en la tabla (...) menos dos (...) justo ahí les dio cero. Por lo tanto, que era raíz.*

[53] A: *Lo hace así muy estructurado.*

[55] A: *Tiene que ir más despacio.*

[56] FP: *Dejemos ese tema de lado (...) Lo que nos había quedado pendiente es que era creciente (...) ¿Cómo sabíamos si una función era creciente?*

De este último fragmento destacamos que la dialéctica de entrar y salir de los temas es gestionada por el FP, como medio para avanzar en el estudio de la tarea, porque los estudiantes no pueden responder de manera satisfactoria. Así mismo, la insistencia de los estudiantes, hace complejo poder sostener la dialéctica de las cajas claras y grises, pues los estudiantes reclaman constantemente la *claridad absoluta de los temas*. La provisionalidad del estudio y la incertidumbre no tiene lugar en la pedagogía corriente en la que se encuentran inmersos. La dialéctica de entrar y salir de los temas se encuentra en estrecha vinculación con la de las cajas claras y grises. Sin embargo, las manifestaciones de los estudiantes confrontan su desarrollo. Pues para ellos cada tema que se estudia deber ser claro y no plantear niveles de grises donde se generan estados de incertidumbre y respuestas que no se construyen completamente. A pesar de esto, el FP mantuvo su rol de director de estudio y prosiguió con el estudio, rompiendo con la enseñanza habitual del estudio instantáneo y completo de las nociones.

En lo que sigue FP instaló la cuestión de *por qué la gráfica de la función involucrada en* t_1 *es la de una función lineal*, sin embargo la expresión no corresponde a la que habitualmente conocen de la función lineal. El FP impulsó a que los estudiantes transformen la expresión de la función involucrada en t_1. Aquí se observaron dificultades en los estudiantes para realizar operaciones algebraicas. Los alumnos propusieron algunas resoluciones que no todas posibilitan avanzar en el estudio. Entre todas las opciones indicadas, emergió factorizar el numerador de la expresión. Ante esta opción, el FP tomó posesión de la misma e indicó:

[178] FP: (…) *Entonces es cierto la igualdad que planteó, que equis cuadrado menos cuatro es igual a esta expresión. Eso se llama diferencia de cuadrados. (…) Nos quedamos con esta expresión. Equis menos dos por equis mas dos sobre equis menos dos ¿qué es lo que hago con esta expresión? (…)*

[179] A: *Simplificar la función.*

[180] FP: *¿Simplificar por qué?*

[181] A: *Simplificar porque si.*

[182] FP: (…) *queremos ver si tiene forma lineal o no. La gráfica nos devolvió una función lineal, cuando la hicimos en el programa Geogebra®. ¿Entonces?*

[184] FP: *¿Qué es lo que tacho?*

[185] A: *El de abajo.*

[190] FP: *Nos quedó equis más dos. Simplificamos(…)*

[193] A: *(…) queda equis mas dos.*

[194] FP: *Claro, es equis mas dos dividido uno. (…) llegamos a equis mas dos, en definitiva termina teniendo la forma de una función lineal (…)*

La sesión concluyó en que los estudiantes realicen la gráfica de la función con Geogebra® y asocien a la gráfica una planilla de cálculo, para registrar en ella los valores que toma la función en torno a $x = 2$.

Aquí el sentido del problema es vivido por el FP, no por los estudiantes. Cada pregunta o problema se vive como una demanda de información del profesor. No hay posibilidad tampoco de que cada pequeño grupo se ocupe del estudio de sus propuestas y luego se discuta en toda la comunidad de estudio. Así, la dialéctica del individuo y el colectivo no tiene posibilidad de existir: el estudio es producto de la interacción del profesor con toda la comunidad de estudio.

4.3 Sesión 3

La sesión se desarrolló en un encuentro de 60 minutos, y se inició con una síntesis de la clase anterior. El estudio se centró en dar respuesta a: $Q_{1,3}$: *¿Qué significa que una función no se encuentre definida en un punto?*, $Q_{1,4}$: *¿Cuándo una función es discontinua?* $Q_{1,5}$: *¿Cómo redefinir una función para que su dominio natural sean todos los reales?* También se mantuvo viva a Q_3. En primera instancia, se instaló la problemática de por qué la función propuesta en $t_1$se encuentra indefinida en $x = 2$. Esta cuestión fue estudiada por el FP y todo el conjunto de estudiantes. La justificación de las respuestas aportadas siempre se colocó en el mismo lugar: el del profesor. Así, el momento tecnológico - teórico fue vivido por el profesor, tal como se pone de manifiesto en el siguiente protocolo:

> [17] FP: *El dominio de la función era los reales menos el dos. Entonces, ¿qué relación hay con lo que nos pasó? ¿Por qué cuando nos acercamos al punto dos dice indefinido?*
>
> [18] A: *Porque no está definido.*
>
> [19] FP: *(...) Ahora, me pregunto, si la función efe de equis no está definida en menos dos, ¿es correcto decir que es igual a equis más dos? ¿Equis más dos está definida para qué valor? (...)*
>
> [20] A: *Los reales.*
>
> [21] FP: *Todos los reales (...) ¿De qué nos damos cuenta? Que esta función está definida para todos los reales y esta no. Entonces, ¿pueden ser iguales o no? Hay algo en que se distinguen ¿y qué es? ¿Qué va a pasar con esa en el valor dos?*

Luego de discusiones entre los estudiantes, el FP retomó la respuesta concluida e incluyó su justificación:

> [29] FP: *Exacto, no se puede hacer. Como nos dijo el Geogebra®. No está definido, no es que vale cero. Directamente no puedo tomar el valor dos porque no puedo dividir por cero (...) Entonces, cuando yo tenga la grafica. ¿Será verdad que esta es la grafica de esta función? Yo acá tengo que hacer una salvedad cuando simplifico. Porque cuando simplifico el denominador. ¿Qué tengo que decir del denominador?*
>
> [31] FP: *Equis no sea dos. Entonces queda la gráfica de equis mas dos, es esta. Ahora, ¿alguien me podrá decir qué pasa con la gráfica de esta? Porque dijimos que va a ser igual a equis más dos, siempre y cuando sea distinto de dos. ¿Y el dos?... Dijimos que la función que planteamos va a ser igual a equis más dos siempre y cuando equis sea distinta de dos. (...)¿Qué le pasa a la función en equis igual a dos?*

En este último fragmento se instaló la pregunta sobre qué ocurre con la función al graficarla y permitió volver a retomar la respuesta a Q_3. Finalmente, la conclusión del estudio es aportada por el profesor:

> [67] FP: *(...) Entonces, como dijo él, lo tengo que saltar. (...) Nosotros teníamos una función equis cuadrado menos cuatro sobre equis menos dos, y va a ser igual a equis más dos. Podría haber puesto equis más dos pero me tengo que fijar que en equis es distinto de dos. Porque esta función no es exactamente igual a esta. Es igual a todos los puntos menos en equis igual a dos Porque dijimos que no está definida. Entonces no la podemos graficar (...) Cuando no está definida en un punto lo que hacemos es un círculo vacío (...) Esto en matemática se llama discontinuidad.*

A continuación, se definió de manera no formal la discontinuidad funcional, para finalmente abocarse el FP al hecho de cómo se realiza la gráfica de funciones discontinua a mano alzada.

Luego, se prosiguió con el estudio parare definir funciones y así resulten continuas. La discusión generada derivó en definir función en rama. Finalmente, es el FP quien dictó la definición correspondiente. De esta manera, como en las sesiones anteriores, el momento de la institucionalización es vivido completamente por el FP.

4.4 Sesión 4

La sesión correspondió a un encuentro de 60 minutos, y se inició con una síntesis de la clase anterior. Aquí se discutió cómo redefinir la función indicada en t_1 para que su dominio sean todos los reales.

A continuación se propuso el estudio de t_2, que involucró el análisis de funciones definidas a trozos con el empleo de Geogebra®:

> **Graficar por medio del programa Geogebra® las siguientes funciones. Extraigan conclusiones acerca de sus comportamientos y compárenlo. Justificar**
>
> $$f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{3} & si \quad x \le 1 \\ x^2-2x & si \quad x>1 \end{cases}$$
>
> $$g(x)=\begin{cases} x^2-2 & si \quad x \ge -2 \\ x+4 & si \quad x<2 \end{cases}$$

El estudio de t_2 tuvo como objetivo analizar dos funciones definidas en ramas. Una de las funciones resulta ser continua y la otra no. Lo que se pretendió es definir límite lateral y estudiarlo en dos casos particulares.

En primera instancia, el FP solicitó interpretar el tipo de función que involucra cada rama de las funciones propuestas. A continuación, indicó la manera de proceder para representar las funciones con el programa, y así luego los estudiantes puedan realizar el análisis correspondiente. A partir del estudio de la representación gráfica, se discutieron las conclusiones arribadas por los estudiantes. Estas se refieren a analizar los puntos de intersección de las funciones con los ejes de coordenada, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. El análisis de los ceros instaló nuevamente la cuestión Q_2: ¿Cómo hallar los puntos donde la función corta a los ejes de coordenadas? que había sido dejada de lado en la sesión 1. Esta cuestión fue propuesta para ser estudiada fuera del horario de clase.

4.5 Sesión 5

La sesión 5 se desarrolló en un encuentro de 60 minutos y se inició con una síntesis de las tareas estudiadas la clase anterior. En esta sesión se propuso el análisis de las dos funciones involucradas en t_2. Aquí el estudio se centró en dar respuesta a Q_5: ¿Cómo estudiar funciones definidas a trozos?, $Q_{5,1}$: ¿Cómo estudiar funciones en un punto?, Q_6: ¿Cómo estudiar límites laterales?, Q_7: ¿En qué puntos estudiar el límite?.

De esta sesión destacamos que el FP, al no obtener respuesta de los estudiantes acerca del comportamiento de las funciones, ocupó todo el espacio de los alumnos. Sus preguntas se encontraron orientadas a dar indicios para que se *mire* y *realice* lo que el profesor indica, tal como se infiere desde el siguiente protocolo:

[5] **FP**: *Ustedes dicen que esta era creciente. Y si miramos a partir de uno, tenemos una función cuadrática. ¿Cómo leemos las funciones para saber si son creciente o decreciente? (...) De izquierda a derecha (...)*

[6] **A**: *Si*.

[21] **FP**: *¿En qué valores corta al eje equis?*

[23] **FP**: *Menos dos equis igual a cero. Igualamos la ecuación a cero. ¿Qué es lo que estamos pidiendo? Para qué valores de equis "y" es cero (...) ¿Qué deberíamos hacer ahora para encontrar los valores de equis?*

[48] **FP**: *¿Cómo está definida la función? (...) esta rama, en la que está definida una función cuadrática. ¿Para qué valores de equis está definida?*

[49] **A**: *Para mayores que dos*.

[50] **A**: *Uno.*

[51] **FP**: *Para los mayores que uno. Entonces cuáles de estos valores teníamos que tomar?... sólo el dos. Es cierto que en cero va a tener una raíz. Pero mi función cuadrática (...) Está definida para los mayores a uno (...) Cuando ustedes resuelvan por Bhaskara y tengan las raíces, para contestar cuál se acerca al eje equis, se van a tener que fijar qué valores van a tener que tomar. Si corresponden a la rama o no (...)*

Aquí el problema es apropiado por el profesor. El énfasis colocado al inicio de la secuencia, donde se buscaba que los estudiantes sean quienes se involucren en el estudio de la tarea expira rápidamente. Pues, ante la poca respuesta de los estudiantes, el FP restringe su actividad a una clase tradicional gobernada por el paradigma de la monumentalización de los saberes. El problema es apropiado por el profesor, encuentra sentido para el FP, pues es quien interpreta los resultados del análisis de los ceros de la función.

El mismo tipo de análisis se reitera para $g(x)$. El estudio prosigue en analizar la función en el punto de cambio de una rama a otra. Al respecto el FP indica:

[109] FP: *Las conclusiones que sacaron es que las ramas se unen en menos dos (...) y ahora lo que estamos discutiendo es el menos dos de equis y en qué valor de y. Él planteó el valor dos. Ahora lo que yo quiero es que justifiquemos, de dónde sacamos ese valor dos (...) se unen cuando se acercan a menos dos ambas tendrían que valer lo mismo (...) Estamos afirmando que se unen. Lo que a mí me gustaría es que analicemos el por qué. ¿De dónde podemos sacar esa información?... ¿Por Geogebra®? (...)*

Luego de varias propuestas se concluye en:

[126] A: *Es "y" igual equis al cuadrado menos... lo que hacemos es reemplazar en la equis.*

[128] A: *Lo reemplaza, en equis menos dos. Hace "y" igual menos dos al cuadrado menos dos...*

[131] FP: *Entonces me queda...*

[130] A: *Cuatro... menos dos, igual a dos.*

[131] FP: *Entonces, yo acá puedo decir que cuando equis vale menos dos "y" vale dos (...)*

A continuación, el FP comparó el estudio realizado para la función involucrada en t_1 y t_2 focalizando en qué puntos se realizan los análisis y por qué. Nuevamente el problema tiene sentido para el profesor, los estudiantes continuaron viviendo su lugar de espectador.

El estudio de las funciones en ramas derivó en la institucionalización del límite de función en un punto de manera intuitiva. Así mismo, se definió límite lateral por izquierda y el FP propuso que los estudiantes escriban el límite lateral por derecha para la próxima sesión.

4.6 Sesión 6

La sesión 6 se desarrolló en un encuentro de 60 minutos. Se inició revisando la definición de límite lateral por derecha. A continuación, el FP propuso que los estudiantes analicen los límites laterales en un punto, de la función involucrada en t_1 y las dos funciones involucradas en t_2. El profesor destinó aproximadamente 35 minutos para que los estudiantes desarrollen la tarea, y luego discutir los resultados obtenidos por cada grupo. Destacamos que nuevamente el estudio fue gestionado íntegramente por el FP, es quien instaló las preguntas, orientó e indicó las respuestas a los estudiantes:

[45] FP: *(...) Para analizar un límite ¿qué es lo primero que tenemos que determinar?*

[46] A: *El equis subcero.*

[47] PF: *(...) ¿Qué equis subcero eligieron ustedes para esta función?*

[48] A: *Cinco.*

[49] FP: *Dos, cinco, ¿Ustedes?... habían analizado el menos dos y está muy bien. En realidad... nosotros habíamos analizado esta función* [el futuro profesor hace referencia a la función involucrada en t_1] *(...) Entonces, por ejemplo los chicos habían planteado estudiar en equis subcero igual a menos dos. ¿Qué tendríamos que estudiar entonces de la función si nuestro punto en cuestión es menos dos? Por ejemplo tengo que analizar límite por derecha ¿y qué es lo que tendría que ver?*

[50] A: *La "y"*

[51] FP: *El valor de "y" a medida que ¿qué?*

[52] A: *A medida que te vas acercando a equis cero.*

[53] FP: *¿Y qué valor sería en este caso?*

[54] A: *Cero*

[55] FP: *Cero. Por izquierda lo mismo. Nosotros podemos tomar cualquier punto para estudiar el límite. Pero en este caso ¿qué pasa con dos? (...)*

[56] A: *Era indefinido*

[57] FP: *En ese punto estaba indefinido. Entonces, tal vez nos preguntáramos qué sucede cuando nos acercamos a este punto, a equis igual a dos. A equis igual a dos. ¿Y qué es lo que sucede? (...) ¿Analizaron los límites cuando equis tiende a dos, por ejemplo por derecha?*

[58] A: *Cuatro*

[59] FP: *(...)¿Cómo hicieron para obtener ese valor cuatro?*

[60] A: *El valor que le queda a "y". El valor de "y" por el que pasa efe de equis cuando...*

[61] FP: *Cuando se va acercando. Entonces yo le voy dando valores cada vez más cercanos a dos, "y" cada vez más cercano a cuatro (...)*

4.7 Sesión 7

La sesión 7 se desarrolló en un encuentro de 60 minutos, y se inició con una síntesis de lo estudiado en la clase anterior. Con el estudio de las tareas se buscó reconstruir la definición de continuidad, dando respuesta a la cuestión Q_8*: ¿Cómo establecer la continuidad y discontinuidad de funciones?*. Así, el FP solicitó comparar las tres funciones estudiadas:

[125] *A: Pero cuando graficás esa* [El FP se refiere a la primer función propuesta en t_2] *(...) La otra se grafica con otro valor.*

[126] *A: Exacto.*

[127] *A: Yo ponía un puntito en la punta de la lineal y me saltaba a la cuadrática.*

[128] FP *Exactamente. ¿Y en esta qué sucede?* [El FP se refiere a la segunda función propuesta en t_2].

[129] *A: Estaba unida justamente en menos dos.*

[130] FP: *(...)¿ qué nosotros analizamos de menos dos? ¿Que los límites cómo son?*

[131] *A: Iguales.*

[132] FP: *¿En este caso? ¿En el caso de ge?*

[133] *A: Los dos son iguales.*

[134] FP: *(...) Y además la función ¿cuánto vale en este punto?* (...)

[135] *A: Dos.*

[136] FP: *¿En el caso de la función en ramas efe? ¿Qué sucede?... Los límites son diferentes y que la función es igual a uno. Está definida. O sea que el límite de efe de equis cuando equis tiende a uno por derecha es distinto cuando equis tiende a uno por izquierda. Y además sabemos que efe en uno es igual a dos tercios.*

[137] *A: Y cómo es el corte acá...*

[138] FP: *(...) esta* [El FP hace referencia a la función involucrada en t_1] *resulta que los límites, dijimos que coinciden cuando equis tiende a dos por derecha, es igual al límite que cuando equis tiende a dos por izquierda. Pero efe en dos, ¿qué sucede con efe en dos? (...)*

[139] *A: No está definida.*

[140] FP: *(...) O podemos decir que no existe. Acá tenemos los tres casos acerca de qué sucede con las diferentes funciones (...)*

[146] FP: *(...) Según lo que analizamos. ¿Qué es lo que tiene que cumplir la función para ser continua?*

[147] *A: Tiene que ser iguales*

[149] *A: Los dos límites...*

[151] *A: Tiene que estar definida en un mismo punto.*

[152] *A: No tiene que tener cortes.*

[185] *A: Profe por qué no nos dice y ya está.*

El estudio desarrollado en la sesión 7 permitió institucionalizar las condiciones para establecer la continuidad de funciones.

Las sesiones 8 y 9 se desarrollaron en dos encuentros, la primera de 120 minutos y la segunda de 60 minutos. Finalmente, en la sesión 10 se procedió a realizar la evaluación de características tradicionales, bajo la modalidad escrita e individual.

En las sesiones 8 y 9 se propuso el estudio de tareas relativas a los siguientes tipos de tareas, con el objetivo de vivir el momento del trabajo de la técnica:

T_1: Establecer el dominio natural de funciones

T_2: Analizar funciones.

$T_{2,1}$: *Estudiar los puntos donde la función intercepta los ejes de coordenadas*

$T_{2,2}$: *Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función*

$T_{2,3}$: *Estudiar límites laterales*

$T_{2,4}$: *Estudiar la continuidad de funciones*

T_3: *Graficar una función conociendo ciertos aspectos de su comportamiento.*

T_4: *Calcular el límite de funciones representadas gráficamente.*

Los ejemplares de tareas se reducen a *aplicar* las técnicas que se originaron con el estudio de las tareas propuestas en t_1 y t_2. En particular, se restringen a estudiar lo que los alumnos comprenden por analizar una función y el análisis de límite y continuidad que emerge del dispositivo didáctico implementado. Si bien, el propósito parecería ser que tenga lugar el momento del trabajo de la técnica, este es vivido no genuinamente. Pues, solo se procura utilizar las técnicas pero no estudiar su eficacia y limitaciones, como fuente productora de modificaciones y dar lugar a la reestructuración de las mismas.

5. CONCLUSIONES

Los resultados indican que el dispositivo didáctico elaborado por el futuro profesor, para el estudio del límite y la continuidad de funciones, no dista de una enseñanza tradicional del cálculo. Se enfatiza el cálculo del límite sin un sólido entorno tecnológico que justifique la manera de hacer, lo que hace que la propuesta praxeológica sea limitada.

En la gestión de la secuencia el futuro profesor pudo incorporar algunos elementos de la enseñanza por REI, que no son suficientes para gestionar dicho dispositivo. Pues, en un principio el futuro profesor centró su práctica en torno al estudio de cuestiones, estas no resultaron fuertemente vivas y fecundas para engendrar en sus estudiantes la necesidad de seguir indagando y buscando respuesta, lo que constituye el motor del REI (dialéctica de preguntas y respuestas). Las preguntas estuvieron colocadas siempre desde el mismo lugar: el profesor, mientras que los estudiantes se ubicaron en el lugar que la enseñanza tradicional les ha asignado: responder y no indagar. Sostener en el tiempo el cuestionamiento y no anteponer respuesta, es un proceso que decae en el tiempo, y conduce a que el profesor retorne una enseñanza monumentalista. Por un lado, los estudiantes no lograron apropiarse de los problemas y por otro el futuro profesor vivió el proceso de estudio como el media universal. Pues, es quien propone los problemas y el que en última instancia establece las respuestas finales que se acaban por reconstruir. No se propusieron instancias donde los estudiantes tengan oportunidades de indagar y buscar en otros recursos que no sean los proporcionados por el profesor. Por ejemplo, no se propiciaron espacios para que los estudiantes emprendan búsquedas en internet, pues cuentan con computadoras personales y acceso a internet, y tampoco se propuso indagar en la biblioteca de la institución. Así, la dialéctica de los medias y los medios no tuvo cabida en toda la implementación.

Estos resultados indican la insuficiencia en la formación de profesores en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y sus últimos desarrollos. No es suficiente desde la formación ocuparse de que los estudiantes adquieran un equipamiento praxeológico didáctico – matemático. El futuro profesor que participó en la investigación ha estudiado durante su carrera la Teoría Antropológica de lo Didáctico y sus últimos desarrollos, pero en toda su formación nunca ha sido expuesto a una enseñanza por REI. Consideramos que esto condiciona fuertemente el diseño e implementación de dispositivos con estas características. Procurar que los futuros profesores desarrollen prácticas fundadas en el paradigma del cuestionamiento del mundo, implica cambios profundos en sus perspectivas acerca de la enseñanza de la matemática. Adherir a este paradigma implica colocar a las preguntas en el eje central del proceso de estudio, lo que permite un trabajo en los estudiantes de indagación permanente. Esto promueve formas de construcción colectiva y social del conocimiento. Las complejas problemáticas, necesidades y condiciones de la vida actual exigen una educación que ubique la investigación como parte importante de su quehacer, vinculándola al aula como medio de aprendizaje para aumentar en los estudiantes el interés por el conocimiento, y sus habilidades investigativas, creativas y de observación, en vías de profundizar en la comprensión de dichas realidades, y seguramente, más adelante, también podrán aportar en su mejoramiento. Una posibilidad para este fin es pensar y desarrollar una educación basada en la riqueza de la pedagogía del cuestionamiento del mundo.

Nuestra investigación se orienta a planear una formación de los futuros profesores que los sumerja en un aprendizaje por REI para el estudio de la didáctica de la matemática. La propuesta consiste en que los estudiantes del profesorado vivan, en posición de alumno, un REI en torno a una situación que denominamos *enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Aquí los estudiantes formulan cuestiones relacionadas a la problemática de ejercer la profesión de profesor y dan respuestas a dichas cuestiones a partir de los referenciales teóricos estudiados durante su formación junto a los aportes de la TAD y sus últimos desarrollos. Así, el grupo de estudiantes define su medio de estudio según sus intereses, al que trata de dar respuesta. En una segunda etapa de la investigación, se procura que los FP puedan diseñar un REI para ser implementado en la escuela secundaria.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Artaud, M., Cirade, G., & Jullien, M. (2011). Intégration des PER dans l´equipement praxéologique du professeur. Le cas de la formation initiale. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 769-794). Barcelona: Centre de Recerca Matemática.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97 - 140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos. En E. Castro & E. de la Torre (Coord.), *Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 43-60). A Coruña: Universidade da Coruña.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. (Tesis de Doctorado). Recuperado de http://www.tesisenred.net/handle/10803/3110

Blázquez, S., & Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30, 67-82.*

Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudios. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23*(1), 79- 135.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(2), 205-250.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática*, *18*(2), 37-74.

Bosch, M., & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89- 113). Santander: SEIEM.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 237–243. Recuperado de http://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs10857-013-9247-2.pdf

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001a). *Les TPE comme problème didactique*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14

Chevallard, Y. (2001b). Aspectos problemáticos de la formación docente. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15

Chevallard, Y. (2004a). *Séminaires de didactique des mathématiques pour les PCL2*. IUFM d'Aix-Marseille. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2004b). *Les trois principes structurants des PER*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard Y. (2006). *Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2009a). *Journal du séminaire TAD/IDD 2008-2009*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=140

Chevallard, Y. (2009b). *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=164

Chevallard, Y. (2009c). *La notion de PER: problèmes et avancées*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

Chevallard, Y. (2012). *Teaching mathematics in tomorrow's society*: A case for an oncoming counterparadigm. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/RL_Chevallard.pdf

Chevallalrd, Y. (2013). *Journal des séances du Séminaire TAD/IDD de l'année 2012-2013*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=212

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Cid, E., & Bolea, P. (2007). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. Recuperado de http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/11%20-%20Cid&Bolea%20TAD%202.pdf

Corica, A., y Otero, M. (2012). Estudio sobre las praxeologías que se proponen estudiar en un Curso Universitario de Cálculo. *BOLEMA*, 26 (42B), 459-482. Recuperado de http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (2011). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria 6 año*. Recuperado de http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/diseniosc urriculares/

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *UNION,* 26, 9–25. Recuperado de http://www.fisem.org/web/union/images/stories/26/archivo_5_de_volumen _26.pdf

Gascón, J. (Noviembre, 2003). *La pedagogía y la didáctica frente a la problemática del profesorado de Matemáticas*. Comunicación presentada en el *XVI Congreso de enciga*, Cangas de Morrazo. Pontevedra.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los Conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNION,* 20, 13-31. Recuperado de http://www.fisem.org/web/union/revistas/20/Union_020_007.pdf

Koc, Y., Peker, D., y Osmanoglu, A. (2009). Supporting teacher professional development through online video case study discussions: An assemblage of preservice and inservice teachers and the case teacher. *Teaching and Teacher Eduaction, 25*(8), 1158 - 1168.

Ladage, C., & Chevallard, Y. (2010). *La pédagogie de l'enquête dans l'éducation au développement durable*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/.

Llanos, V., Otero, M., & Bilbao, M. (2011). Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI). *REIEC, 6*(1), 102-112. Recuperado de http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/

Marietti, J. (2010). *Questionnement du monde et pédagogie de l'enquête: obstacles et points d'appui*. (Mémoire de 2e année de master recherche de sciences de l'éducation, Université de Provence). Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Polo, I., González, M., Gómez, P., & Restrepo, A. (2011). Argumentos que utilizan los futuros profesores cuando seleccionan tareas matemáticas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 491-502). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista de currículo y formación de profesorado, 8*(1), 1-15. Recuperado de http://www.ugr.es/~recfpro/Rev81.html

Robert, A., & Pouyanne, N. (2005). Formar formadores de maestros de matemáticas de educación media: ¿Por qué y cómo?. *Educación Matemática*, *17*(2), 35-58.

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Aljibe.

Ruiz, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2007). *Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris.* Recuperado de http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/

Ruiz, A., & Sierra, T. (2011). La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 769-794). Barcelona: Centre de Recerca Matemática.

Sánchez, V., & García, M. (2004). Formadores de profesores de Matemáticas. Una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de Educación, 333*, 481–493. Recuperado de http://www.revistaeducacion.mec.es/re333/re333_23.pdf

Sierra, T., Bosch, M., & Gascón, J. (2012). La formación matemático – didáctico del maestro de Educación Infantil: el caso de "cómo enseñar a contar". *Revista de Educación*, 357, 231 – 256.

Recuperado de http://www.revistaeducacion.educacion.es/re357/re357_11.pdf

Silverman, J., & Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 499-511. Recuperado de

http://pat-thompson.net/PDFversions/2008SilvermanThompsonMKT.pdf

Steff, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In A. Nelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ Lawrence Erlbaum Associates.